ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

AUTOVALORES COMPLEJOS.

Vamos a dibujar los diagramas de fases de los sistemas de E.D.O. lineales planos en el caso de que la matriz de coeficientes solo tenga autovalores complejos. Es decir, sistemas que reducidos a su forma de Jordan real son de la forma:

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & -bx & + & ay \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para ello tendremos en cuenta las propiedades generales que verifican las trayectorias de un sistema autónomo (que vimos cuatro lecciones atrás):

- las trayectorias no se cortan;
- las trayectorias son curvas simples o periódicas (esto último solo es posible si hay autovalores complejos);
- o también pueden ser puntos de equilibrio.

Como en la lección anterior, veremos los casos reducidos a matrices de Jordan y veremos como esta información nos permite luego ver los casos generales.

Matrices con dos autovalores complejos conjugados, $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Con esta expresión tenemos cuatro casos posibles dependiendo de los signos de a y b o el caso $a = 0$.

Observación 1. *Son importantes tanto el signo de a como el de b.*

- *El signo de a nos determina si las* ***trayectorias salen o llegan*** *al origen.*
- *El signo de b nos indica el* ***sentido de giro*** *de las trayectorias.*

Para entender lo anterior, primero vamos a escribir de una forma particular las soluciones generales del sistemas. Con ello podremos escribir las trayectorias en **coordenadas polares**.

Una matriz fundamental de soluciones es:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}.$$

Así las trayectorias que tenemos son:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{at}\cos bt + c_2 e^{at}\operatorname{sen} bt \\ y(t) &= -c_1 e^{at}\operatorname{sen} bt + c_2 e^{at}\cos bt \end{aligned} \qquad \text{para} \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Observemos que

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = e^{at}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Si llamamos $r_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y

$$\begin{aligned} \cos\theta_0 &= \tfrac{c_1}{r_0} \\ \operatorname{sen}\theta_0 &= \tfrac{c_2}{r_0} \end{aligned}$$

(ver la figura),

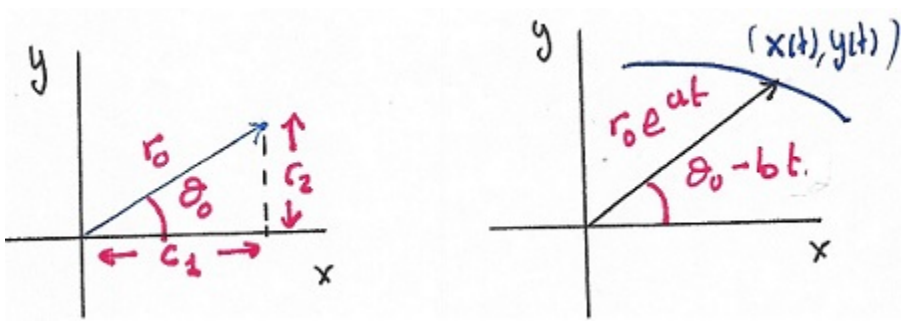

FIGURA 1. **Definición de seno y coseno. Coordenadas polares.**

entonces las trayectorias las podemos escribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 e^{at}\cos\theta_0\cos bt + r_0 e^{at}\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen} bt \\ y(t) &= -r_0 e^{at}\cos\theta_0\operatorname{sen} bt + r_0 e^{at}\operatorname{sen}\theta_0\cos bt \end{aligned}$$

para $r_0 \in [0, \infty)$ y $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas del seno y del coseno de la suma de ángulos y que $\operatorname{sen} -t = -\operatorname{sen} t$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 e^{at}\cos(\theta_0 - bt) \\ y(t) &= r_0 e^{at}\operatorname{sen}(\theta_0 - bt) \end{aligned} \qquad \text{para} \qquad r_0 \in [0, \infty) \text{ y } \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Con esta expresión, es claro que una parametrización en coordenadas polares de las trayectorias es la dada por

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 e^{at} \quad \textbf{radio} \\ \theta(t) &= \theta_0 - bt \quad \textbf{argumento} \end{aligned} \qquad \text{para} \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde $r_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\theta_0 = \arctan \frac{c_2}{c_1}$.

Con esta expresión general, vamos a examinar los distintos casos con los que nos podemos encontrar.

$\boxed{a > 0}$

Puntos de equilibrio. Es claro que el $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio.

Límites. $\lim_{t\to-\infty} r(t) = \lim_{t\to-\infty} r_0 e^{at} = 0$, las trayectorias **salen** de cero.

Por otro lado, $\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} r_0 e^{at} = \infty$, las trayectorias tiene radio mayor al crecer t.

Como el argumento es periódico, las trayectorias giran alrededor del origen. ¿En que sentido?

Sentido de giro. El sentido del giro va a depender del signo de b:

- $\boxed{b > 0}$ En este caso el argumento $\theta(t) = \theta_0 - bt$ es una función decreciente, por tanto el **giro** es **positivo** (como el **reloj**):

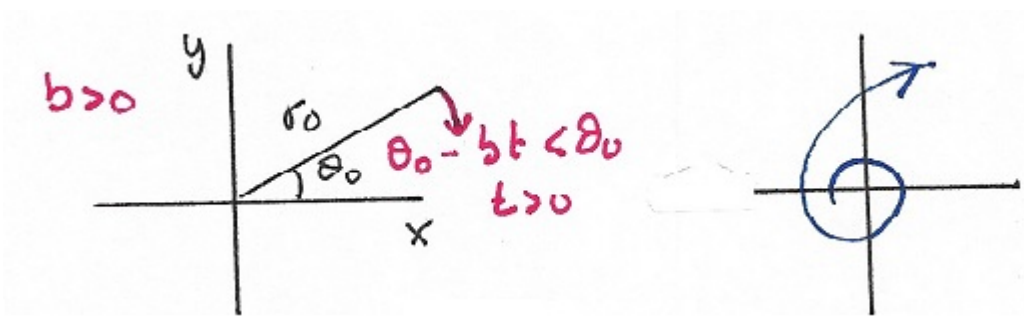

FIGURA 2. **Giro positivo. Diagrama de fases.**

- $\boxed{b < 0}$ En este caso el argumento $\theta(t) = \theta_0 - bt$ es una función creciente, por tanto el **giro** es **negativo** (contrario al del **reloj**):

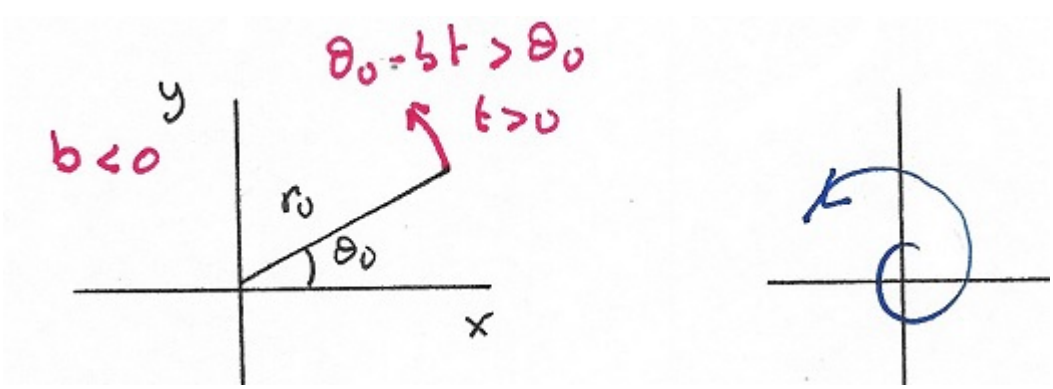

FIGURA 3. **Giro negativo. Diagrama de fases.**

Observemos que las trayectorias se alejan todas del origen, girando en torno suyo. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 1. *Dado el sistema*

$$\begin{array}{rcrcl} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & -bx & + & ay \end{array}$$

con $b \neq 0$ *y* $a > 0$, *se dice que el* ***punto de equilibrio*** $(0,0)$ *es* ***espiral inestable*** *o* ***foco inestable****.*

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de las matriz A son complejos conjugados $(a \pm bi)$ con $a > 0$.

$\boxed{a < 0}$ **Ejercicio.** En este caso, comprueba que los diagramas de fases que se obtiene son:

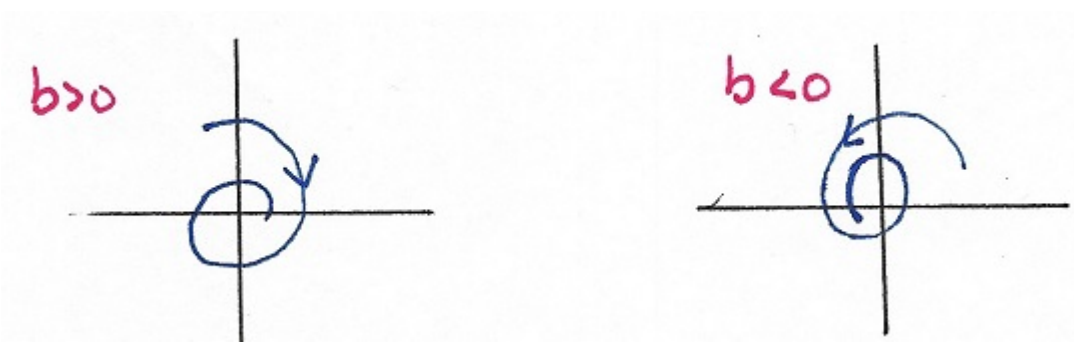

FIGURA 4. **Diagramas de fases.**

Observemos que las trayectorias se entran todas al origen, girando en torno suyo. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 2. *Dado el sistema*

$$\begin{array}{rcrcl} x' & = & ax & + & by \\ y' & = & -bx & + & ay \end{array}$$

con $b \neq 0$ *y* $a < 0$, *se dice que el* ***punto de equilibrio*** $(0,0)$ *es* ***espiral estable*** *o* ***foco estable****.*

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de las matriz A son complejos conjugados $(a \pm bi)$ con $a < 0$.

$\boxed{a = 0}$ En este caso, las trayectorias son de la forma:

$$\begin{array}{rcl} r(t) & = & r_0 \\ \theta(t) & = & \theta_0 - bt \end{array}.$$

El radio es constante, por tanto las trayectorias son circunferencias de centro el origen. El sentido de giro, como en los casos anteriores, depende del signo de b.

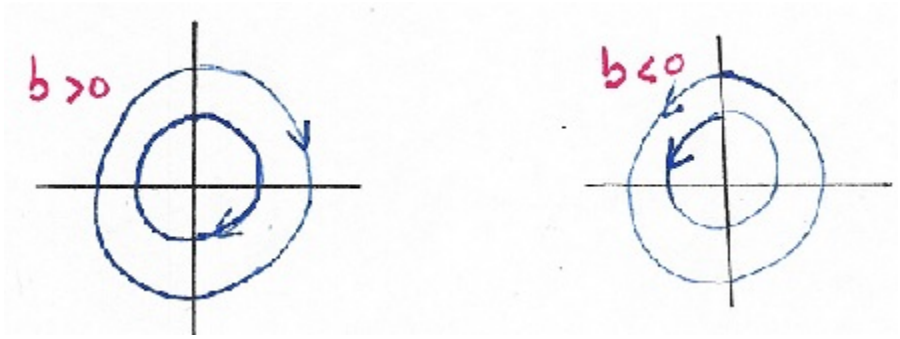

FIGURA 5. **Diagramas de fases.**

Observemos que las trayectorias giran todas alrededor del origen. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3. *Dado el sistema*

$$\begin{array}{rcrl} x' & = & & by \\ y' & = & -bx & \end{array}$$

con $b \neq 0$ y $a = 0$, se dice que el ***punto de equilibrio*** $(0,0)$ *es un* ***centro****.*

Más adelante generalizaremos este concepto para cualquier sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cuando los autovalores de las matriz A son complejos conjugados $(a \pm bi)$ con $a = 0$.

Observación 2. *En este último caso ($a = 0$), las trayectorias son $\frac{2\pi}{b}$-****periódicas*** *y además están* ***acotadas****. Lo cual solo ocurre en este caso para sistemas lineales planos (descontadas las soluciones de equilibrio o estacionarias).*

Sistemas con autovalores complejos conjugados.

Consideramos el problema

$$\begin{array}{rcrl} x' & = & ax & +by \\ y' & = & cx & +dy \end{array}$$

cuya matriz A de coeficientes tiene como autovalores a $\lambda = a \pm bi \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$. Si $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es la matriz de Jordan real semejante a A, ya sabemos resolver el problema $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$. También

sabemos que hay una **matriz de paso**

$$Q = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix},$$

cuyas columnas $v_1 = (q_1, q_3)$ y $v_2 = (q_2, q_4)$ son la parte real y compleja respectivamente de un autovector. Entonces las soluciones del problemas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} e^{Jt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 e^{at} \cos(\theta_0 - tb) \\ r_0 e^{at} \operatorname{sen}(\theta_0 - tb) \end{pmatrix} =$$

$$r_0 e^{at} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - tb) \\ \operatorname{sen}(\theta_0 - tb) \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad r_0 \in [0, \infty) \ \text{ y } \ \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Para representar el **diagrama de fases** de nuestro problema en A, solo hay que representar estas curvas paramétricas solución en el plano.

También podemos usar que las soluciones del problema en A son las soluciones del problema en J transformadas por la matriz de paso Q. Así teniendo en cuenta la Proposición 1. de tres lecciones atrás, sabemos que:

- los **puntos de equilibrio** solo son uno, el origen.
- La parte
$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - tb) \\ \operatorname{sen}(\theta_0 - tb) \end{pmatrix}$$
de las soluciones son curvas periódicas, por tanto **curvas cerradas**.
  - Si $a = 0$, nuestras trayectorias son curvas cerradas (**Ejercicio**: ver que son elipses) alrededor del origen. Y el origen es un **centro**.
  - Si $a > 0$, nuestras trayectorias son espirales que salen girando del origen y en torno a él. El origen es un **punto espiral inestable**.
  - Si $a < 0$, nuestras trayectorias son espirales que entran girando al origen y en torno a él. El origen es un **punto espiral estable**.
- ¿Cuál es el sentido de giro de las espirales anteriores? La matriz de paso Q pueden cambiar el sentido de giro.

Ejemplo 1. *Toma la matriz* $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y una solución de problema* J *del tipo* $\begin{pmatrix} \cos -t \\ \operatorname{sen} -t \end{pmatrix}$ *y comprueba que la transformada por* Q *gira en sentido contrario.*

¿Como determinamos el sentido de giro? Fácil nos fijamos en lo que le pasa a una trayectoria concreta, a ser posible sencilla ($r_0 = 1$ y $\theta_0 = 0$).

Veamos un ejemplo para fijar ideas.

Ejemplo 2. *Vamos a dibujar el* ***diagrama de fases*** *del sistema*

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & -3x & + & 4y \\ y' & = & -10x & + & 9y \end{array}.$$

Autovalores. Resolvemos la ecuación característica:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -10 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(3+\lambda)(9-\lambda) + 40 = ... = (\lambda - 3)^2 + 4.$$

Así los autovalores del sistema son: $\lambda = 3 \pm 2i$.

Punto de equilibrio. Dado que la matriz A tiene determinante no nulo, la única solución estacionaria es el origen $(0,0)$. Como $Re\lambda = 3 > 0$, el origen es un **foco** o **punto espiral inestable**.

Soluciones del problema en J .- Las trayectorias del problema respecto de la matriz de Jordan J semejante a A vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 e^{3t} \cos(\theta_0 - t2) \\ r_0 e^{3t} \operatorname{sen}(\theta_0 - t2) \end{pmatrix}.$$

Son espirales que salen de cero y giran ($2 > 0$) en sentido positivo. Las trayectoria de nuestro problemas son similares, salvo quizas el sentido de giro.

Matriz de Paso. .-Para el autovalor $\lambda = 3 + 2i$ tenemos el sistema $(-3 - (3+2i))x + 4y = 0$, por tanto $y = (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})x$. Un autovector puede ser $v = (2, 3+i)$. Tomando la parte real $v_1 = (2,3)$ y la parte compleja $v_2 = (0,1)$, tenemos nuestra matriz de paso

$$Q = (v_1\, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluciones del sistema. Tendremos soluciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{x}(t) \\ \overline{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 e^{3t} \cos(\theta_0 - t2) \\ r_0 e^{3t} \operatorname{sen}(\theta_0 - t2) \end{pmatrix} =$$

$$r_0 e^{3t} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta_0 - t2) \\ 3\cos(\theta_0 - t2) + \operatorname{sen}(\theta_0 - t2) \end{pmatrix},$$

para $r_0 \in [0,\infty)$ y $\theta_0 \in [0,2\pi)$. Así para $r_0 = 1$ y $\theta_0 = 0$, la trayectoria $e^{3t}\begin{pmatrix} 2\cos(-t2) \\ 3\cos(-t2)+\operatorname{sen}(-t2) \end{pmatrix}$, en $t = 0$ pasa por el punto $(2,3)$ y en $t = \epsilon > 0$ pasa por $(\,2\cos(-2\epsilon), 3\cos(-2\epsilon) + \operatorname{sen}(-2\epsilon)\,)$. Como las tangentes de los argumentos de estos puntos verifican que

$$\frac{3}{2} > \frac{3\cos(-2\epsilon)+\operatorname{sen}(-2\epsilon)}{2\cos(-2\epsilon)},$$

tenemos que el argumento de $(2,3)$ es mayor que el de $(\,2\cos(-2\epsilon), 3\cos(-2\epsilon)+\operatorname{sen}(-2\epsilon)\,)$. Luego el giro es en sentido positivo.

Diagrama de Fases. Con toda la información anterior, podemos representar las trayectorias de las soluciones, espirales alrededor del origen que giran en sentido positivo:

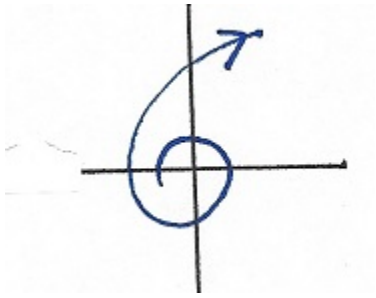

FIGURA 6. **Diagramas de fases.**

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS.

Hemos dibujado diagramas de fases de sistemas lineales planos homogéneos. En el caso no homogéneo, pero con un término independiente constante:

$$x' = Ax + b$$

con $b \in \mathbb{R}^2$ constante y $|A| \neq 0$; las soluciones del sistema son la suma de las soluciones del sistema homogéneo más una solución particular. Así, como $|A| \neq 0$, se tiene que la solución estacionaria o constante $x = -bA^{-1}$ es una solución particular.

El diagrama de fases del sistema es, por tanto, el correspondiente al del sistema homogéneo desplazado por el vector $-bA^{-1}$.

Ejemplo 3. *Dado el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= \quad y + 1 \\ y' &= -4x \quad\quad + 8 \end{aligned}$$

queremos dibujar su diagrama de fases.

El **sistema homogéneo asociado** es

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x \end{aligned}$$

con **autovalores**

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Luego los autovalores son complejos conjugados $\lambda = \pm 2i$. Para $\lambda = 2i$, tenemos un sistema $-2ix + y = 0$ y por tanto un autovector asociado es $v = (1, 2i)$. Tomado la parte entera y la parte imagianaria, tenemos que la matriz de paso es $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Por tanto las soluciones del sistema homogéneo son curvas cerradas (elipses, $Re2i = 0$) que giran alrededor del origen con sentido positivo ($Im2i = 2 > 0$ y la matriz de paso no cambia el sentido). El origen es un **centro**.

El sistema no homogéneo tiene como solución de equilibrio o estacionaria a la solución del sistema

$$\begin{aligned} -1 &= y \\ -8 &= -4x \end{aligned} .$$

El punto de equilibrio es $(2, -1)$, que es una solución particular del sistema. Esta solución desplaza a las del sistema homogéneo y vemos que el diagrama de fases de nuestro sistema no homogéneo es:

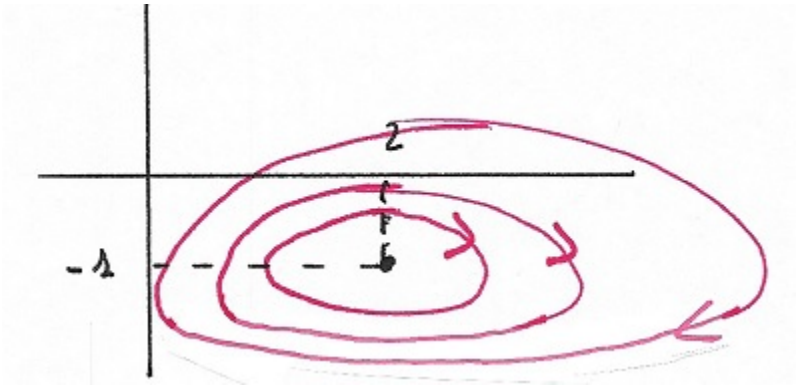

FIGURA 7. **Diagramas de fases.**

donde decimos que el punto $(2, -1)$ es un **centro**.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es