ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ DIAGONALIZABLE.

Dada una matriz A cuadrada de orden n y coeficientes reales, si está es **diagonalizable**, entonces en este caso es sencillo calcular su exponencial. Distinguiremos dos casos. Uno, que todos los autovalores de la matriz A sean reales . Dos, que pueda haber autovalores complejos.

AUTOVALORES REALES.

Recordemos que el **Álgebra Lineal** nos enseña que:

- Si una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene todos sus autovalores reales y distintos, entonces es diagonalizable. (Ver el **Ejemplo 3** de la lección anterior).
- Si una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es **simétrica**, es decir si es igual a su transpuesta $A = A^t$, entonces tiene todos sus autovalores reales y además es diagonalizable.
- De forma general, si una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene por autovalores reales (o complejos) a $\lambda_1, \lambda_2, , , , \lambda_r$ entonces A es diagonalizable si y solo si
$$\sum_{i=1}^{r} dimKer(A - \lambda_i I) = n.$$

Observación 1. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, λ es un autovalor y V_λ es un autovector respecto de λ, entonces $x(t) = e^{\lambda t}V_\lambda$ es una solución del sistema: $x'(t) = Ax(t)$. Claro,*
$$(e^{\lambda t}V_\lambda)' = \lambda e^{\lambda t}V_\lambda = \lambda V_\lambda e^{\lambda t} = AV_\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t}V_\lambda.$$

De aquí deducimos que:

Teorema 1. *Sea una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable. Sean $\lambda_1, \lambda_2, , , , \lambda_n$ sus n autovalores (pueden ser iguales) y sean los correspondientes $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, ..., V_{\lambda_n}$ autovectores linealmente independientes, entonces el sistema homogéneo $x'(t) = Ax(t)$ tiene a:*

1. $\phi(t) = (e^{\lambda_1 t}V_{\lambda_1} \;\; e^{\lambda_2 t}V_{\lambda_2} \;\; .... \;\; e^{\lambda_n t}V_{\lambda_n})$, *matriz de columnas, como* ***matriz fundamental****;*
2. $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t}V_{\lambda_1} + c_2e^{\lambda_2 t}V_{\lambda_2} + ... + c_ne^{\lambda_n t}V_{\lambda_n}$, *para* $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$, *por* ***solución general****.*

Demostración: Como A es diagonalizable, su matriz de Jordan asociada es $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$ y la matriz de paso está dada por $Q = (V_{\lambda_1}\ V_{\lambda_2} \ldots V_{\lambda_n})$, matriz de columnas. Sabemos que una matriz fundamental del problema es

$$e^{At}Q = Qe^{Jt} = (V_{\lambda_1}\ V_{\lambda_2} \ldots V_{\lambda_n}) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} =$$

$$(e^{\lambda_1 t}V_{\lambda_1}\ e^{\lambda_2 t}V_{\lambda_2}\ \ldots\ e^{\lambda_n t}V_{\lambda_n}).$$

Por tanto la solución general del problema es:

$$x(t) = (e^{\lambda_1 t}V_{\lambda_1}\ e^{\lambda_2 t}V_{\lambda_2}\ \ldots\ e^{\lambda_n t}V_{\lambda_n}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$c_1 e^{\lambda_1 t}V_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}V_{\lambda_2} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}V_{\lambda_n} \qquad \text{para} \quad (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \square$$

Usando el último ejemplo de la lección anterior

Ejemplo 1. $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t)$, *donde* $x(0) = (1, 0, 0)$.

Los autovalores del matriz son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 3$ con autovectores asociados $V_1 = (-1, -1, 2), V_2 = (1, 0, 1)$ y $V_3 = (3, 0, -2)$, respectivamente; así tres soluciones linealmente independientes del sistema son: $e^{2t}(-1, -1, 2), e^{4t}(1, 0, 1)$ y $e^{3t}(3, 0, -2)$ y la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ -0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

para todo $\quad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

AUTOVALORES COMPLEJOS.

Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un autovalor complejo, entonces su conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es autovalor de la matriz A. Si la matriz A es diagonalizable, su matriz de Jordan asociada es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y la **forma real de esta matriz de Jordan** (¡que llamaremos con el mismo nombre J!) es

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & & \cdots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

es decir podemos encontrar una matriz de paso que transforma los elementos de la diagonal $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ en una matriz 2×2 de la forma $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Si aplicamos la definición de matriz exponencial a la forma real de la matriz J tendremos que:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \overline{e^{Bt}\rfloor} & & & \cdots & 0 \\ 0 \quad 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 \quad 0 & & \cdots & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Ahora el problema se reduce a calcular la matriz exponencial 2×2 e^{Bt}.

Lema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix}.$$

Demostración: Observemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Como $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la **identidad**, conmuta con cualquier matriz, y por las propiedades de la exponencial, tenemos que

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} t} = e^{aIt} e^{b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t}$$

Ahora, ya sabemos que

$$e^{aIt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado si $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $E^2 = -I$, $E^3 = -E$ y por último $E^4 = I$ y usando la definición

$$e^{Et} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E^k t^k}{k!} =$$

usando como son de particulares las potencias de E

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} \\ -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Juntando todo lo anterior

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} t} = e^{aIt} e^{bEt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \operatorname{sen} bt \\ -e^{at} \operatorname{sen} bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \qquad \square$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2. *Tenemos el sistema:*

$$\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}(t)$$

Para resolver el sistema necesitamos encontrar una matriz fundamental.

Cálculo de autovalores. Resolvemos

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 & -3 \\ -2 & -5-\lambda & 2 \\ -4 & -10 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ -10 & 3-\lambda \end{vmatrix} + ...$$

$$..... = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

Por tanto los autovalores son 1, el valor complejo i y su conjugado $-i$. Como son tres valores distintos la matriz A es diagonalizable y su matriz de Jordan real es $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora usando el Lema anterior

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Cálculo de la matriz de paso. .- Para el autovalor $\lambda = 1$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +7y & -3z & = & 0 \\ -2x & -6y & +2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +7y & -3z & = & 0 \\ & y & -z & = & 0 \end{array} \right. ;$$

un vector solución del sistema es $V_1 = (-2, 1, 1)$, autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$.

.- Para el autovalor $\lambda = i$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rrrcl} (3-i)x & +7y & -3z & = & 0 \\ -2x & (-5-i)y & +2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} (3-i)x & +7y & -3z & = & 0 \\ (-2+(2/3)(3-i))x & ((-5-i)+(14/3))y & & = & 0 \end{array} \right. ;$$

un vector solución del sistema es $V_2 = (-1+2i, 1-i, 2) = (-1, 1, 2) + i(2, -1, 0)$, autovector asociado al autovalor $\lambda = i$.

.- Para el autovalor $\lambda = -i$, la teoría nos dice que un autovector asociado es el vector $V_3 = (-1-2i, 1+i, 2)$.

Ahora la matriz de paso real, según nos dice la teoría (ver el Apéndice sobre la matriz de Jordan), es

$$Q = (V_1 \;\; (1/2)(V_2+V_3) \;\; (1/2i)(V_2-V_3)) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz fundamental del problema. Ahora una matriz fundamental del problema es:

$$e^{At}Q = Qe^{Jt} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2e^t & -\cos t - 2sent & -\operatorname{sen} t + 2\cos t \\ e^t & \cos t + \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t - \cos t \\ e^t & 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

De forma general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sea el problema $x'(t) = Ax(t)$, donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, es una matriz diagonalizable. Sean los autovalores de la matriz:*

$$\textit{los reales:} \qquad \lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r$$

$$\textit{los complejos:} \qquad \alpha_{r+1}+\beta_{r+1}i, \alpha_{r+1}-\beta_{r+1}i, \ldots\ldots, \alpha_{r+s}+\beta_{r+s}i, \alpha_{r+s}-\beta_{r+s}i$$

con $r+2s = n$ (algunos autovectores se pueden repetir). Se consideran los autovectores asociados:

$$V_1, \ldots, V_r, V_{r+1}+iU_{r+1}, V_{r+1}-iU_{r+1}, \ldots\ldots, V_{r+s}+iU_{r+s}, V_{r+s}-iU_{r+s}$$

respectivamnete. Entonces la matriz de Jordan real semejante a la Matriz A es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \vdots \\ & & & \underline{B_{r+1}\rfloor} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \underline{B_{r+s}\rfloor} \end{pmatrix}$$

donde $B_{r+j} = \begin{pmatrix} \alpha_{r+j} & \beta_{r+j} \\ -\beta_{r+j} & \alpha_{r+j} \end{pmatrix}$ *para todo* $j = 1, 2, ..., s$. *La matriz de paso* Q, *que nos da la matriz* J, *es la matriz de las columnas*

$$Q = (\ V_1\ ...\ V_r\ V_{r+1}\ U_{r+1}\ V_{r+2}\ U_{r+2}\ .....\ V_{r+s}\ U_{r+s}\ ).$$

Una matriz fundamental del sistema es

$$e^{At}Q = Qe^{Jt} = Q \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & & & \vdots \\ & & & \underline{e^{B_{r+1}t}\rfloor} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \underline{e^{B_{r+s}t}\rfloor} \end{pmatrix}$$

donde $e^{B_{r+j}} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_{r+j}t}\cos\beta_{r+j}t & e^{\alpha_{r+j}t}\operatorname{sen}\beta_{r+j}t \\ -e^{\alpha_{r+j}t}\operatorname{sen}\beta_{r+j}t & e^{\alpha_{r+j}t}\cos\beta_{r+j}t \end{pmatrix}$ *para todo* $j = 1, 2, ..., s$.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es