

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE E.D.O. III

El juego de las derivadas.

El Teorema de la Función Implícita.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas (es decir $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$). Entonces

$$F(x, y) = K$$

representa una curva en el plano. Variando $K \in \mathbb{R}$ conseguimos una familia de curvas del plano.

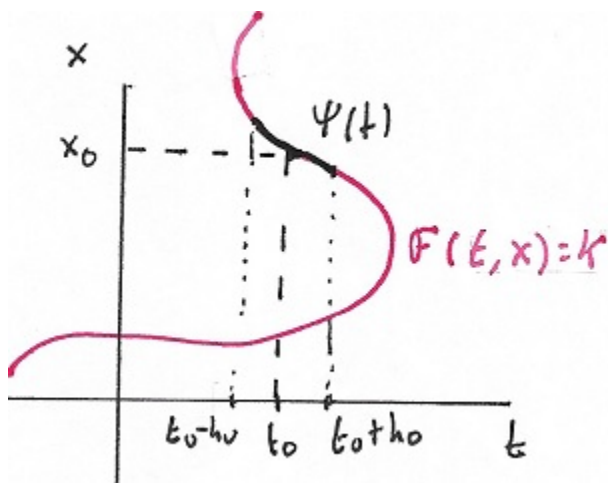


FIGURA 1. Curva plana. En implícitas y como una gráfica.

Si un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ verifica que

$$F(t_0, x_0) = K \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0,$$

entonces el Teorema de la Función Implícita nos dice que existe una única función ψ definida sobre un entorno de t_0

$$\begin{array}{ccc} \psi & : & [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \rightarrow \mathbb{R} \\ & & t \rightarrow \psi(t) \end{array}$$

de modo que

$$F(t, \psi(t)) = K \quad \text{para todo} \quad t \in [t_0 - h_0, t_0 + h_0].$$

Además, el Teorema nos dice que ψ , que al menos localmente representa la curva $F(t, x) = K$ como una gráfica, es derivable. Su derivada se obtiene derivando, respecto de t , la expresión $F(t, \psi(t)) = K$. Usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \psi(t)) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, \psi(t))\psi'(t) = 0.$$

Despejando

$$(*) \quad \begin{cases} \psi'(t) &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \psi(t))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, \psi(t))} \\ \psi(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Esto no es más que una E.D.O. de primer orden cuyas curvas solución son la familia de curvas $F(t, x) = K$.

Observación 1. Si pedimos además que $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, entonces el Teorema de las Derivadas Cruzadas nos dice que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

o que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}.$$

Así de la ecuación $(*)$ de arriba, tendríamos que

$$\frac{\partial - \frac{\partial F}{\partial x_1}}{\partial x_2} = - \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x_2}}{\partial x_1}.$$

Esta Observación da lugar a la siguiente definición.

Ecuaciones exactas.

Definición 1. Dadas dos funciones $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $p, q \in C^1(D)$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, se dice que la E.D.O. de primer orden

$$x'(t) = \frac{p(t, x)}{q(t, x)}$$

es **exacta** si se verifica que

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}(t, x) = - \frac{\partial q}{\partial x_1}(t, x),$$

o que

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, x) = - \frac{\partial q}{\partial t}(t, x),$$

para todo $(t, x) \in D$.

El siguiente Teorema sirve para caracterizar las Ecuaciones Exactas, así como para encontrar su solución: la función $F(t, x)$ de la cual p y q son derivadas parciales salvo el signo.

Teorema 1. Dada una E.D.O. de primer orden del tipo:

$$x'(t) = \frac{p(t, x)}{q(t, x)}$$

donde $p, q \in C^1(D)$, siendo D un abierto convexo de $\mathbb{R}^2$. La ecuación es **exacta** si y solo si existe una función $F \in C^2(D)$ de modo que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = p(t, x) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -q(t, x)$$

para todo $(t, x) \in D$.

Demostración: Si existe tal F , entonces

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}$$

y así

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} = \frac{\partial(-q)}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

lo que prueba que la ecuación es exacta.

La otra implicación es el **método de resolución de las ecuaciones exactas**. Veámoslo.

Sea $(t_0, x_0) \in D$. Buscamos una función F que verifique que $F(t_0, x_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial t} = p$ y que $\frac{\partial F}{\partial x} = -q$. Así, como p y q son continuas, fijada x , por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$F(t, x) - F(t_0, x) = \int_{t_0}^t p(s, x) ds.$$

De forma análoga, fijada t_0 , entonces

$$F(t_0, x) = F(t_0, x_0) - \int_{x_0}^x q(t_0, r) dr.$$

Como queremos que $F(t_0, x_0) = 0$, definimos F por

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t p(s, x) ds - \int_{x_0}^x q(t_0, r) dr.$$

Veamos que esta función tiene las propiedades deseadas y que además nos da una solución implícita de la ecuación.

■

$$F(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_0} p(s, x_0) ds - \int_{x_0}^{x_0} q(t_0, r) dr = 0$$

■

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d(\int_{t_0}^t p(s, x) ds)}{dt} = p(t, x),$$

por el Teorema Fundamental del Cálculo.

■

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{d(\int_{t_0}^t p(s, x) ds)}{dx} - \frac{d(\int_{x_0}^x q(t_0, r) dr)}{dx} = \\ &\int_{t_0}^t \frac{d(p(s, x))}{dx} ds - q(t_0, x) = \end{aligned}$$

usando que la ecuación es exacta

$$\int_{t_0}^t -\frac{d(q(s, x))}{ds} ds - q(t_0, x) = -q(t, x) + q(t_0, x) - q(t_0, x) = -q(t, x).$$

Como existen las derivadas parciales de F y son funciones de C^1 , entonces $F \in C^2$.

Además sabemos por el Teorema de la Función Implícita, como hemos visto al principio, que existe una única función ψ de modo que $\psi(t_0, x_0) = 0$, que $F(t, \psi(t)) = 0$ y que además

$$\psi'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \psi(t))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, \psi(t))} = \frac{-p(t, \psi(t))}{-q(t, \psi(t))},$$

lo que prueba que la curva $F(t, x) = 0$ es la solución de la E.D.O. para $x(t_0) = x_0$ $\square$

Ejemplo 1. Consideramos $x'(t) = -\frac{x^2(t)+t^2}{2xt}$. Es una E.D.O. homogénea, pero también es exacta.

Claro

■

$$\frac{\partial(-x^2 - t^2)}{\partial x} = -2x$$

■

$$\frac{\partial(2xt)}{\partial t} = 2x$$

Luego su solución viene dada por

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int_{t_0}^t -(x^2 + s^2) ds - \int_{x_0}^x 2rt_0 dr = \\ &= -(x^2 s + \frac{s^3}{3}) \Big|_{t_0}^t - (r^2 t_0) \Big|_{x_0}^x = -x^2 t - \frac{t^3}{3} + x_0^2 t_0 + \frac{t_0^3}{3} = \\ &= -x^2 t - \frac{t^3}{3} + K \quad \square \end{aligned}$$

Factor integrante.

Definición 2. Dadas dos funciones $p, q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $p, q \in C^1(D)$, siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y dada la E.D.O. de primer orden

$$x'(t) = \frac{p(t, x)}{q(t, x)}.$$

Se llama **factor integrante** para la ecuación, a toda función

$$\begin{aligned} \mu &: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\rightarrow \mu(t, x) \neq 0 \end{aligned}$$

con $\mu \in C^1(D)$ y de modo que la E.D.O.

$$x'(t) = \frac{p(t, x)\mu(t, x)}{q(t, x)\mu(t, x)}$$

es **exacta**.

Nos podemos preguntar si siempre existe un factor integrante. Para ello tiene que ocurrir que

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t, x)\mu(t, x)}{\partial x} &= \mu(t, x)\frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + p(t, x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x) = \\ -\frac{\partial q(t, x)\mu(t, x)}{\partial t} &= -\mu(t, x)\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) - q(t, x)\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x).\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo, si la **Ecuación en Derivadas Parciales** (E.D.P)

$$\mu(t, x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x)\right) = -p(t, x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(t, x) - q(t, x)\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, x)$$

tiene solución. Claro que los Teoremas de Existencia y Unicidad para E.D.P. nos quedan muy lejos. Pero si, la E.D.P. anterior admite solución y por tanto para toda E.D.O. de primer orden se puede encontrar un factor integrante que la haga exacta; y por tanto, esto nos da un método para integrarla, teóricamente. Como es fácil de adivinar, encontrar un factor integrante no es sencillo. En algunos casos se puede hacer. Por ejemplo:

- si $\mu = \mu(t)$, entonces tenemos $\mu\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -q\mu'$, que es una E.D.O. lineal;
- si $\mu = \mu(x)$, entonces tenemos $\mu\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -p\mu'$, que es una E.D.O. lineal;
- si $\mu = \mu(t + x)$, entonces tenemos $\mu\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -(p + q)\mu'$, que es una E.D.O. lineal;
- si $\mu = \mu(t^2 + x^2)$, entonces tenemos $\mu\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) = -(2xp + 2tq)\mu'$, que es una E.D.O. lineal.

Ejemplo 2. Dada la E.D.O. $x'(t) = \frac{t + x^2}{2tx}$, **no** es exacta ya que

$$\frac{\partial(t + x^2)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial(2tx)}{\partial t}.$$

Vamos a intentar un factor integrante de la forma $\mu = \mu(t)$. ¿Por qué? Vamos a intentarlo. Si funciona, bien. Si no, probamos de otro tipo.

Queremos que $x'(t) = \frac{(t + x^2)\mu(t)}{(2tx)\mu(t)}$ sea exacta. Para ello tiene que ocurrir que:

$$\frac{\partial(t + x^2)\mu(t)}{\partial x} = -\frac{\partial(2tx)\mu(t)}{\partial t},$$

es decir que

$$2x\mu(t) = -(2x\mu(t) + 2tx\mu'(t)) \quad \Leftrightarrow \quad 2\mu(t) = -t\mu'(t).$$

Esto es una E.D.O. lineal, que es de fácil resolución. $\mu(t) = 1/t^2$ es una solución. Y por tanto:

$$x'(t) = \frac{\frac{1}{t} + \frac{x^2}{t^2}}{\frac{2x}{t}}$$

es una E.D.O. exacta. Su solución viene dada por

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t \frac{1}{s} + \frac{x^2}{s^2} ds - \int_{x_0}^x \frac{2r}{t_0} dr \quad \square$$

Ejercicio 1. Resuelve el problema 4 de la Hoja I o el problema 7 de la Hoja VII usando un factor integrante de la forma

$$\mu(x, y) = x - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ejemplo 3. Toda **ecuación autónoma** de primer orden puede resolverse usando un factor integrante.

Demostración: Consideramos una ecuación autónoma de primer orden

$$y'(x) = f(y(x)).$$

Allí donde $f(y) = 0$ tenemos soluciones estacionarias. Si $f(y) \neq 0$, entonces usamos el factor integrante

$$\mu(y) = \frac{1}{f(y)}.$$

Así

$$\textcolor{red}{y}'(x) = \frac{f(y(x)) \frac{1}{f(y)}}{\frac{1}{f(y)}} = \frac{\textcolor{red}{1}}{\textcolor{red}{f(y(x))}} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Como $\frac{\partial 1}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial \frac{1}{f(y)}}{\partial x} = 0$, la ecuación es exacta. Podemos integrarla y su solución viene dada por

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x 1 dx - \int_{y_0}^y \frac{1}{f(y)} dy = \\ &= x - \int_{y_0}^y \frac{1}{f(y)} dy \quad \square \end{aligned}$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es