EXAMEN Elem. de E.D.O. 25 de Mayo 2022.

Nombre y apellidos:..

1.- (1 puntos) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{3t+3x^2(t)+2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

2.- (1 puntos) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 27t^2 \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2 \end{cases}$$

3.- (2 puntos) Dada la ecuación $x^{n)}(t) + a_{n-1}x^{n-1)}(t) + ... + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0$, una E.D.O. lineal de orden n y coeficientes constantes, de modo que su ecuación característica tiene una única raíz real de multiplicidad n, prueba que

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{n-1}e^{\lambda t}$$

son soluciones de la E.D.O. y además linealmente independientes.

4.- (1 puntos) Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= rx_3(t) \\ x_3'(t) &= -4x_2(t) \end{aligned}$$

¿Para que valores de $r \in \mathbb{R}$ el sistema tiene todas sus curvas solución acotadas? Justifica tu respuesta.

5.- (1 puntos) Representa el diagrama de fases del sistema :

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 3x - 3y + 3 \end{cases}$$

6.-(1 puntos) Dada una funcón f de modo que

$$f, f', ..., f^{n)} \in Lap(0, \infty),$$

prueba que la siguiente igualdad respecto a la Tranformada de Laplace es cierta

$$Lf^{n)}(s) = s^nLf(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2)}f'(0) - .... - sf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0).$$

7.-(1 puntos) Encuentra la curva del plano $(x(t), y(t))$ que satisface:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)y(t) \\ y'(t) = x^2(t) + y^2(t) \\ x(0) = 1 \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

Nota: La solución puede darse con una ecuación implícita.

EXAMEN MAYO 2022

PROBLEMA 1:

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{3t + 3x^2(t) + 2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

SE PUEDE ESCRIBIR

$$\frac{1}{x'(t)} = 3t + 3x^2(t) + 2.$$

POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, TENEMOS QUE

$$\begin{cases} t'(x) = 3t(x) + 3x^2 + 2 \\ t(1) = 0 \end{cases}$$

E.D.O LINEAL NO HOMOGÉNEA

E.D.O LINEAL HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$t'(x) = 3t(x) \Rightarrow \boxed{t(x) = ke^{3x} \quad k \in \mathbb{R}}$$

COMO $f(x) = 3x^2 + 2$ ES UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO. (Y 0 NO ES RAIZ DE $\lambda - 3 = 0$).

PODEMOS INTENTAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE TIPO

$$t_0(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$t_0'(x) = 2Ax + B$$

ENTRANDO EN LA E.D.O CON t_0, TENEMOS.

$$2Ax + B = 3(Ax^2 + Bx + C) + 3x^2 + 2$$

ASÍ $(3A + 3)x^2 + (3B - 2A)x + 3C - B + 2 = 0$

LO QUE IMPLICA QUE
$$\begin{cases} 3A + 3 = 0 \\ 3B - 2A = 0 \\ 3C - B + 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow A = -1 \quad \Rightarrow B = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow C = -\frac{8}{9}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O ES

$$\boxed{t(x) = ke^{3x} - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} \quad k \in \mathbb{R}}$$

AHORA COMO BUSCAMOS LA SOLUCIÓN $t(1) = 0$, TENEMOS QUE

$$0 = ke^3 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{8}{9} \Rightarrow k = \frac{23}{9e^3}$$

LA SOLUCIÓN BUSCADA ES $\boxed{t(x) = \frac{23}{9}e^{3(x-1)} - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}}$

EXAMEN MAYO 2022.

PROBLEMA 2:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 27t^2 \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2. \end{cases}$$

E.D.O LINEAL HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$$

TIENE POR ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

LUEGO $\lambda = 3$ ES RAÍZ DOBLE LA EC. CARACTERÍSTICA

ASÍ $\boxed{y(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA

COMO $27t^2$ ES UN POLINOMIO DE 2º GRADO Y $\lambda = 0$ NO ES RAÍZ DE LA EC. CARACTERÍSTICA, DEBEMOS PROBAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$y_0(t) = At^2 + Bt + C$$

$$y_0'(t) = 2At + B$$

$$y_0''(t) = 2A$$

ENTRANDO EN LA EDO CON y_0

$$2A - 6[2At + B] + 9[At^2 + Bt + C] =$$

$$9At^2 + [-12A + 9B]t + 2A - 6B + 9C = 27t^2$$

ASÍ IGUALANDO COEFICIENTES DE POLINOMIOS.

$9A = 27 \Rightarrow A = 3$

$-12A + 9B = 0 \Rightarrow B = 4$

$2A - 6B + 9C = 0 \Rightarrow C = 2$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO ES.

$$\boxed{y(t) = k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t} + 3t^2 + 4t + 2 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

EXAMEN MAYO 2022.

AHORA

$$y'(t) = 3k_1 e^{3t} + k_2 e^{3t} + 3k_2 t e^{3t} + 6t + 4$$

COMO BUSCAMOS LA SOLUCIÓN QUE VERIFICA $y(0) = 1$ Y

$$y'(0) = 2$$

TENEMOS QUE:

$$1 = k_1 + 2. \qquad \Rightarrow k_1 = -1$$

$$2 = 3k_1 + k_2 + 4 \qquad \Rightarrow k_2 = 1$$

LUEGO LA SOLUCIÓN BUSCADA ES:

$$\boxed{y(t) = -e^{3t} + t e^{3t} + 3t^2 + 4t + 2}$$

EXAMEN MAYO 2022.

PROBLEMA 2:
$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 27t^2 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

VAMOS A USAR LA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA RESOLVERLO

APLICANDO TRANSFORMADAS

$$\mathcal{L}[y''(t) - 6y'(t) + 9y(t)](s) =$$

$$\mathcal{L}y''(s) - 6\mathcal{L}y'(s) + 9\mathcal{L}y(s) =$$

$$= s^2\mathcal{L}y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[s\mathcal{L}y(s) - y(0)] + 9\mathcal{L}y(s)$$

$$= (s^2 - 6s + 9)\mathcal{L}y(s) - s - 2 + 6 = \mathcal{L}[27t^2](s) =$$

$$= 27\frac{2}{s^3}$$

ASÍ $(s-3)^2\mathcal{L}y(s) - s + 4 = \frac{54}{s^3}$

DESPEJANDO
$$\boxed{\mathcal{L}y(s) = \left[\frac{54}{s^3} + s - 4\right]\frac{1}{(s-3)^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{s^4 - 4s^3 + 54}{s^3(s-3)^2}}$$

SOLUCIÓN EN TRANSFORMADAS

AHORA
$$\frac{s^4 - 4s^3 + 54}{s^3(s-3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-3} + \frac{E}{(s-3)^2} =$$

DESCOMPOSICIÓN FRACCIONES SIMPLES

$$= \frac{1}{s^3(s-3)^2}\left[As^2(s-3)^2 + Bs(s-3)^2 + C(s-3)^2 + Ds^3(s-3) + Es^3\right]$$

$$= \frac{1}{s^3(s-3)^2}\left[As^4 - 6As^3 + 9As^2 + Bs^3 - 6Bs^2 + 9Bs + Cs^2 - 6Cs + 9C + Ds^4 - 3Ds^3 + Es^3\right] =$$

$$= \frac{1}{s^3(s-3)^2}\left[(A+D)s^4 + (-6A + B - 3D + E)s^3 + (9A - 6B + C)s^2 + (-6C + 9B)s + 9C\right]$$

EXAMEN MAYO 2022.

IGUALANDO COEFICIENTES DE POLINOMIOS

$$\begin{aligned}
A \quad + D \quad &= 1 & \Rightarrow D = -1\\
-6A + B \quad - 3D + E &= -4 \\
9A - 6B + C \quad &= 0 & \Rightarrow A = 2\\
9B - 6C \quad &= 0 & \Rightarrow B = 4\\
9C \quad &= 54 & \Rightarrow C = 6
\end{aligned}$$

Y POR ÚLTIMO $-6(2) + 4 - 3(-1) + E = -4 \quad \Rightarrow E = 1$

ASÍ $\mathcal{L}\, y(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2}$

MIRANDO EN LAS TABLAS

$$\mathcal{L}(2)(s) = \frac{2}{s}$$

$$\mathcal{L}(4t)(s) = \frac{4}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(3t^2)(s) = \frac{6}{s^3}$$

$$\mathcal{L}(-e^{3t}) = \frac{-1}{s-3}$$

$$\mathcal{L}(te^{3t}) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

LUEGO $\boxed{y(t) = 2 + 4t + 3t^2 - e^{3t} + te^{3t}}$

ES LA SOLUCIÓN BUSCADA

EXAMEN MAYO 2022

PROBLEMA 3: $x^{n)}(t) + a_{n-1} x^{n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$

con ecuación característica

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

con λ raíz de multiplicidad n.

Así $x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-\lambda)^n$.

Por teoría sabemos que la EDO se puede escribir entonces como

$$(D-\lambda)^n x = 0$$

donde $Dx = x'$ es el operador diferencial

y λx es el operador producto por escalar λ.

De las propiedades de los operadores lineales sabemos que

$$(D-\lambda)^n x = (D-\lambda)^{n-1}(D-\lambda)x$$

$$\text{y } (D-\lambda)^n x = (D-\lambda)(D-\lambda)^{n-1}$$

Vamos a probar por inducción que

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n-1} e^{\lambda t}$$

anulan al operador $(D-\lambda)^n$.

Primero si $n=1$ $\quad (D-\lambda)e^{\lambda t} = De^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0$

Supongamos que para $n-1$

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots t^{n-2} e^{\lambda t}$$

anulan al operador $(D-\lambda)^{n-1}$

por tanto también anulan al operador $(D-\lambda)^n$

ya que $(D-\lambda)^n t^r e^{\lambda t} = (D-\lambda)(D-\lambda)^{n-1} t^r e^{\lambda t} = (D-\lambda)\,0 = 0$ para $r = 0, 1, \dots, n-2$

Ahora veamos que además

$$(D-\lambda)^n t^{n-1} e^{\lambda t} = 0$$

EXAMEN MAYO 2022

CLARO $(D-\lambda)^n t^{n-1} e^{\lambda t} =$

$$= (D-\lambda)^{n-1} (D-\lambda)\, t^{n-1} e^{\lambda t} =$$

$$= (D-\lambda)^{n-1} \left((n-1)\, t^{n-2} e^{\lambda t} + \cancel{\lambda t^{n-1} e^{\lambda t}} - \cancel{\lambda t^{n-1} e^{\lambda t}} \right) =$$

$$= (n-1)(D-\lambda)^{n-1} \left(t^{n-2} e^{\lambda t} \right) \underset{\uparrow}{=} 0$$

POR HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

SOLO QUEDA VER QUE LAS FUNCIONES

$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n-1}e^{\lambda t}$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

SUPONGAMOS QUE $0 = \sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i e^{\lambda t} =$

DONDE 0 INDICA LA FUNCIÓN CONSTANTEMENTE NULA

$$= e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i$$

COMO $e^{\lambda t} \neq 0$ PARA TODO t, DEDUCIMOS QUE EL POLINOMIO DE GRADO $n-1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i \equiv 0$$

LUEGO ESTO SOLO ES POSIBLE SI $r_i = 0 \ \forall i = 0, \dots, n-1$.

LO QUE PRUEBA QUE SON INDEPENDIENTES

EXAMEN MAYO 2022

PROBLEMA 4)

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = r x_3$$
$$x_3' = -4 x_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

PARA LA MATRIZ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, SU MATRIZ DE JORDAN SEMEJANTE SERÁ LA SIGUIENTE:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & r \\ 0 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & r \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 4r)$$

ASÍ LOS AUTOVALORES DE A SERÁN

SI $r > 0$ $\quad \lambda = 0$ y $\lambda = \pm 2\sqrt{r}\, i$ COMPLEJOS CONJUGADOS

SI $r = 0$ $\quad \lambda = 0$ CON MULTIPLICIDAD 3

SI $r < 0$ $\quad \lambda = 0$ y $\lambda = \pm 2\sqrt{-r}$ TODOS REALES DISTINTOS.

PARA $r > 0$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\sqrt{r}t & \operatorname{sen} 2\sqrt{r}t \\ 0 & -\operatorname{sen} 2\sqrt{r}t & \cos 2\sqrt{r}t \end{pmatrix}$

LA MATRIZ FUNDAMENTAL $e^{At} = Q e^{Jt} Q^{-1}$ TIENE TODAS SUS DONDE Q ES LA MATRIZ DE PASO, FUNCIONES COLUMNAS ACOTADAS YA QUE ASÍ LO SON LAS DE e^{Jt}.

PARA $r < 0$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{-r} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{-r} \end{pmatrix}$ y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sqrt{-r}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\sqrt{-r}t} \end{pmatrix}$

Y CLARAMENTE VAMOS A ENCONTRAR SOLUCIONES NO ACOTADAS EN EL SISTEMA, POR EJEMPLO SEA v_1 UN AUTOVECTOR PARA EL AUTOVALOR $2\sqrt{-r}$, SABEMOS QUE $x(t) = e^{2\sqrt{-r}t} v_1$ ES UNA SOLUCIÓN DEL SISTEMA, QUE CLARAMENTE NO ESTÁ ACOTADA.

EXAMEN MAYO 2022

PARA $\gamma = 0$

EL SISTEMA $(A - 0I)x = 0 \iff$

$$x_2 = 0$$

$$-\tfrac{1}{2}x_2 = 0$$

TIENE POR SOLUCIÓN UN SUBESPACIO DE DIMENSIÓN 2 GENERADO POR $(1,0,0)$ Y $(0,0,1)$

LUEGO LA MATRIZ $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y ASÍ $e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

POR TANTO TIENE ALGUNA SOLUCIÓN NO ACOTADA EL SISTEMA $x' = Jx$ POR EJEMPLO

$$x(t) = e^{Jt}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, t, 1).$$

AL SER TRANSFORMADA, ESTA SOLUCIÓN POR LA MATRIZ DE PASO, LA SOLUCIÓN CORRESPONDIENTE DE $x' = Ax$ ES NO ACOTADA.

LA RESPUESTA CORRECTA ES POR TANTO $\underline{\underline{\gamma > 0}}$

EXAMEN MAYO 2022.

PROBLEMA 5:
$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 3x - 3y + 3 \end{cases}$$

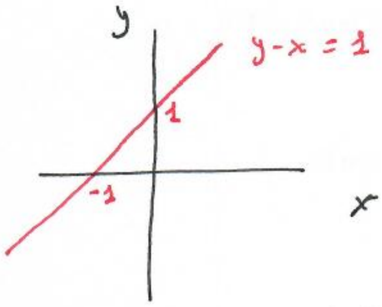
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} 0 &= x - y + 1 \\ 0 &= 3x - 3y + 3 \end{aligned}$$ es decir la recta $x - y = -1$ $\iff y - x = 1$

es una recta de puntos de equilibrio

$y - x = 1$ recta de puntos de equilibrio



El sistema homogéneo asociado es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ tiene $x - y = 0$ como recta de puntos de equilibrio

Sus autovalores son

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(3+\lambda) + 3 = \lambda^2 + 2\lambda$$ así $\lambda = 0$ y

$\lambda = -2$ autovalores.

El autovector correspondiente a $\lambda = 0$ es claramente $(1, 1) = v_1$

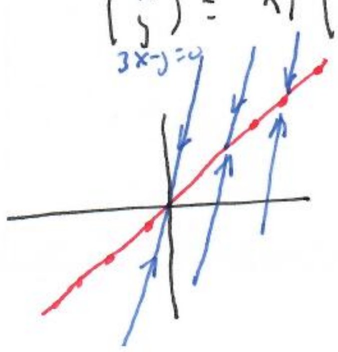
El autovector correspondiente a $\lambda = -2$ es

$3x - y = 0$ luego $v_2 = (1, 3)$

La solución general del problema homogéneo es por tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow[t \to \infty]{} k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[t \to -\infty]{} \infty \end{cases}$$

luego



← recta de puntos de equilibrio

Diagrama de fases del problema homogéneo

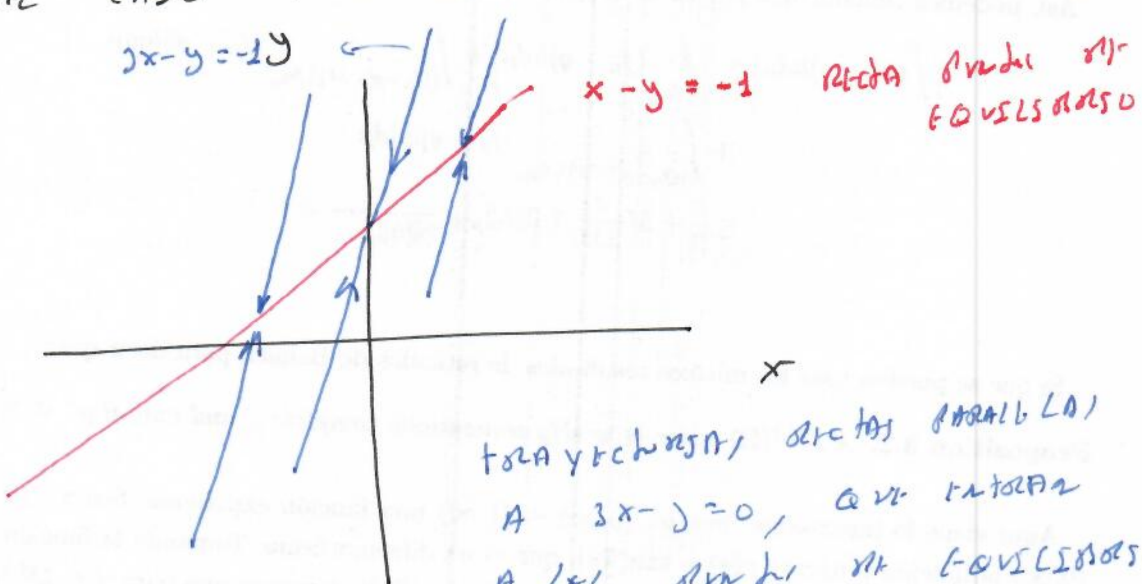
EXAMEN MAYO 2022

OBSERVAMOS QUE $(0,1)$ ES UNA SOLUCIÓN CONSTANTE DEL PROBLEMA NO HOMOGÉNEO

LUEGO
$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL CASO NO HOMOGÉNEO

Y SU DIAGRAMA DE FASES ES LA TRASLACIÓN DEL CASO HOMOGÉNEO SEGÚN EL VECTOR $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



TRAYECTORIAS RECTAS PARALELAS A $3x - y = 0$, QUE ENTRAN A LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DE LA RECTA $x - y = -1$.

EXAMEN MAYO 2022.

PROBLEMA 6:] SI $f, f', \dots f^{n)} \in Lap(0,\infty)$

PROBAREMOS POR INDUCCIÓN SOBRE n.

SI $n=1$

$$\mathcal{L} f'(s) \underset{\downarrow}{=} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt \underset{\text{PARTES}}{=}$$

DEFINICIÓN.
EXISTE $\mathcal{L}f'$ YA QUE POR HIPÓTESIS SUPONEMOS QUE SI

$$f(t)\, e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-st} - f(0) + s\,\mathcal{L} f(s) \underset{\downarrow}{=} s\,\mathcal{L} f(s) - f(0).$$

YA QUE $f \in Lap(0,\infty)$

SUPONGAMOS QUE EL RESULTADO ES CIERTO PARA $n-1$.

AHORA $$\mathcal{L} f^{n)}(s) \underset{\downarrow}{=} \int_0^\infty f^{n)}(t)\, e^{-st}\, dt \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$f^{n)} \in Lap(0,\infty)$
Y LA DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA

$$f^{n-1)}(t)\, e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f^{n-1)}(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} f^{n-1)}(t)\, e^{-st} - f^{n-1)}(0) + s\,\mathcal{L} f^{n-1)}(s) =$$

$$= s\,\mathcal{L} f^{n-1)}(s) - f^{n-1)}(0) \underset{\text{H. INDUCCIÓN}}{=}$$

$f^{n-1)}(t) \in Lap(0,\infty)$

$$s\left(s^{n-1}\mathcal{L} f(s) - s^{n-2} f(0) - \dots - s f^{n-3)}(0) - f^{n-2)}(0)\right) - f^{n-1)}(0) =$$

$$= s^n \mathcal{L} f(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s^2 f^{n-3)}(0) - s f^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0).$$

QUE ES LO QUE BUSCAMOS.

EXAMEN MAYO 2022

PROBLEMA 7:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,y(t) \\ y'(t) = x^2(t) + y^2(t) \\ x(0)=1 \quad y(0)=1 \end{cases}$$

La curva paramétrica $(x(t), y(t))$ tiene por pendiente de la tangente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x^2(t)+y^2(t)}{x(t)\,y(t)}$$

Luego

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2 + y^2(x)}{x\,y(x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

E.D.O. de primer orden homogénea

El cambio $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ hace que:

$$\boxed{z'(x) =} \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^2+y^2}{\cancel{x}y}\cancel{x} - y\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}}{y}\right] = \frac{1}{y} = \boxed{\frac{1}{x}\frac{x}{y} = \frac{1}{x}\frac{1}{z}}$$

E.D.O. de variables separadas

con $z(1) = \dfrac{y(1)}{1} = 1$.

Así $z'(x)\,z(x) = \dfrac{1}{x}$ integrando $\dfrac{z^2(x)}{2} = \ln x + k$

Así $z(x) = \sqrt{2\ln x + 2k}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

Como $z(1)=1$ $\quad k = 1/2$ $\quad$ y así

$$z(x) = \sqrt{2\ln x + 1}$$

Observamos que como $z(1)=1>0$, la raíz cuadrada tiene signo positivo

Ahora $\dfrac{y(x)}{x} = z(x) = \sqrt{2\ln x + 1}$

Así $\boxed{y(x) = x\sqrt{2\ln x + 1}}$ curva solución

En paramétricas $\left(x,\ x\sqrt{2\ln x + 1}\right)$.