EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

15 de Junio de 2022.

1.- Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^5 \frac{1+nx}{n+x^2}dx.$$

(**Indicación:** comprueba que la sucesión de funciones converge uniformemente en $[0,a]$, para $a>0$).

2.- Calcula la serie de Fourier de $f(x)=|cos(\pi x)|$ con $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

3.- Resuelve el problema de Cauchy: $\begin{cases} \frac{x'(t)}{t^2+1} &= x^2(t)+1 \\ x(0)=1 \end{cases}$.

4.- Calcula

$$x \equiv (a^{600}+528^{891})^{31} \quad \text{mod. } 31, \qquad \text{donde} \quad a\in\mathbb{Z}_{31}\setminus\{0\}.$$

5.- a) Se considera el subconjunto $G=\{1,-1,\imath,-\imath\}\subset\mathbb{C}$, donde $\imath=\sqrt{-1}$. ¿Es G con el producto un grupo? ¿Es cíclico? Encuentra un generador g ¿Cuál es el orden de g^2?
b) En general, si g es un generador de un grupo $G=\{g,g^2,\dots,g^{n-1},g^n=1\}$, ¿cuál es el orden de g^k, $k<n$?

6.- Se considera $\mathbb{K}=\mathbb{Z}_3[x]/<x^2+x+2>$.
1) ¿Es $\mathbb{K}$ un cuerpo? ¿Cuáles son sus elementos? ¿Cuántos son?
2) Encuentra la solución $q(x)\in\mathbb{K}$ de la ecuación $[x+1]q(x)=[x+1]^{66}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

La revisión del examen se efectuará el día 29 de Junio a las 16 horas en el aula 16. No es obligatorio asistir a la revisión. Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-20-21/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

EXAMEN AM

PROBLEMA 1 $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^5 \frac{1+nx}{n+x^2}\,dx$

SI CONSIDERAMOS LA SUCESIÓN DE FUNCIONES

$$f_n(x)=\frac{1+nx}{n+x^2} \qquad x\in[0,a] \quad a>0$$

SU LÍMITE PUNTUAL ES

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx}{n+x^2}=x$$

VEAMOS QUE $f(x)=x$ ES LÍMITE UNIFORME EN $[0,a]$

ASÍ

$$\left| x-\frac{1+nx}{n+x^2}\right| = \left|\frac{\cancel{nx}+x^3-1-\cancel{nx}}{n+x^2}\right| =$$

$$=\frac{|x^3-1|}{n+x^2} \underset{x>0}{\leq} \frac{|x^3|+|1|}{n} \underset{0\leq x\leq a}{\leq} \frac{a^3+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

INDEPENDIENTEMENTE DE $x\in[0,a]$.

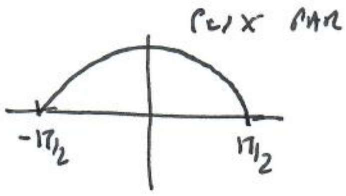
AHORA COMO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^5 \frac{1+nx}{n+x^2}\,dx=\int_0^5 \lim_{n\to\infty}\frac{1+nx}{n+x^2}\,dx=$$

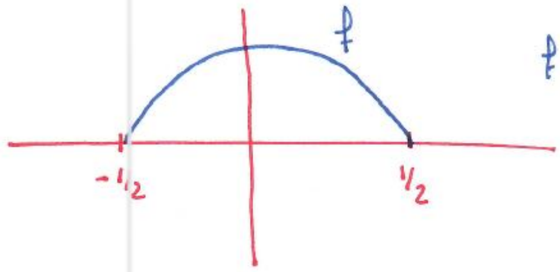
$$=\int_0^5 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=\frac{25}{2}$$

EXAMEN AM

PROBLEMA 2 $\quad f(x) = |\cos(\pi x)| = \cos \pi x \quad x \in [-1/2, 1/2]$



$x\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$
SI $x \in [-1/2, 1/2]$.



f ES PAR

ESTA FUNCIÓN 1-PERIÓDICA (LONGITUD DEL INTERVALO $[-1/2, 1/2]$).

PARA CALCULAR SU SERIE DE FOURIER, COMO f ES PAR (Y POR TANTO $b_n = 0$), SÓLO ES NECESARIO CALCULAR

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x \, dx \underset{\text{PAR}}{=} 4\int_0^{1/2} \cos \pi x \, dx = 4\,\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi}\Big|_0^{1/2} =$$

$$= 4\,\frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x \cos 2\pi n x \, dx \underset{\text{PAR}}{=} 4\int_0^{1/2} \cos \pi x \cos 2\pi n x \, dx =$$

$$= 4\int_0^{1/2} \frac{1}{2}\left[\cos(\pi x + 2\pi n x) + \cos(\pi x - 2\pi n x)\right] dx =$$

POR PARTES O USANDO QUE $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

(TAMBIÉN SE PUEDE HACER LA INTEGRAL POR PARTES)

$$= 2\int_0^{1/2} \cos((\pi + 2\pi n)x)\,dx + 2\int_0^{1/2} \cos((\pi - 2\pi n)x)\,dx =$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{sen}((2n+1)\pi)x}{(2n+1)\pi}\Big|_0^{1/2} + 2\,\frac{\operatorname{sen}((1-2n)\pi)x}{(1-2n)\pi}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{2}{\pi(2n+1)}\operatorname{sen}\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{(2n-1)\pi}\operatorname{sen}\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi(2n+1)}(-1)^n + \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^{n+1}$$

[illegible]

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{-1}{(2n+1)} + \frac{1}{(2n-1)}\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{\cancel{-2n}+1\cancel{+2n}+1}{4n^2-1}\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$$

ASÍ LA SERIE DE FOURIER DE f ES

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1} \cos(2\pi n x).$$

— . —

EXAMEN AM

PROBLEMA 3

$$\begin{cases} \dfrac{x'(t)}{t^2+1} = x^2(t)+1 \\ x(0)=1 \end{cases}$$

TENEMOS UNA EDO DE 1ER ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)+1} = t^2+1$$

INTEGRANDO EN AMBOS LADOS DE LA IGUALDAD

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)+1}\,dt = \operatorname{Arc\,tan} x(t)$$

$$\int t^2+1\,dt = \frac{t^3}{3} + t + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

LUEGO $\quad \operatorname{Arctan} x(t) = \dfrac{t^3}{3} + t + k$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \tan\left(\frac{t^3}{3} + t + k\right) \qquad k \in \mathbb{R}$$

COMO $x(0)=1 \Rightarrow 1 = \tan(k)$ ASÍ $k = \frac{\pi}{4}$

LUEGO LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ES

$$x(t) = \tan\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{\pi}{4}\right)$$

COMPROBACIÓN

$$x'(t) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot t^2+1$$

LUEGO $\dfrac{x'(t)}{t^2+1} = 1 + t^2\left(\dfrac{t^3}{3} + t + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + x^2(t).$

EXAMEN AM

PROBLEMA 4: $x \equiv (a^{600} + 528^{891})^{31} \mod 31$

$a \in \mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z}_{31}$ ES UN CUERPO Y $\mathbb{Z}_{31}^{*} = \mathbb{Z}_{31} \setminus \{0\}$ UN GRUPO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 30.

ASI $a^{30} \equiv 1 \mod 31$ (TEOREMA DE EULER)

LUEGO $a^{600} = a^{30 \times 20} \equiv 1 \mod 31$

$$\begin{array}{l|l} 528 & 31 \\ 218 & 17 \\ \underline{01} & \end{array}$$

$528 \equiv 1 \mod 31$ LUEGO $528^{891} \equiv 1$

ASI $a^{600} + 528^{891} \equiv 2 \mod 31$

$2^{31} = 2^{30} \times 2 = 1 \times 2 \equiv 2 \mod 31$ (DE NUEVO POR EL TEOREMA DE EULER)

EXAMEN AM

PROBLEMA 5: $G = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$ $i = \sqrt{-1}$

TABLA

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	-1	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

CLARAMENTE ES UN GRUPO CONMUTATIVO

G ES CÍCLICO YA QUE
$G = \{i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$

TANTO i COMO $-i$ SON GENERADORES.

SI g ES UN GENERADOR DE G DE ORDEN 4,
CLARAMENTE $(g^2)^2 = g^4 = 1$ TIENE g^2 ORDEN 2

b) $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = 1\}$
¿ CUAL ES EL ORDEN DE g^k, $k < n$?

SEA $r = m.c.m(k, n)$

ENTONCES, $g^r = 1$ YA QUE r ES MULTIPLO DE n.

POR OTRO LADO $g^r = (g^k)^{r/k}$ CON $r/k \in \mathbb{N}$ YA QUE $k \mid r$.

LUEGO $\text{ord}\, g^k = \frac{\text{mcm}(k, n)}{k}$

OBSERVEMOS QUE SI $m.c.d(k, n) = 1 \Rightarrow \text{mcm}(k, n) = k \cdot n$
Y POR TANTO $\text{ord}\, g^k = n$. Y ASÍ g^k TAMBIÉN ES GENERADOR

EXAMEN AM

PROBLEMA 6: $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+x+2\rangle$.

SEA $f(x) = x^2+x+2$

$f(0) = 2$

$f(1) = 1$

$f(2) = 4+2+2 = 2$ $\quad$ f no tiene raíces en $\mathbb{Z}_3$

y tiene grado 2; por tanto f es irreducible y así el cociente

$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+x+2\rangle$ es un cuerpo

$\mathbb{K} = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$, en total $|\mathbb{K}| = |\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+x+2\rangle| = 3^2 = 9$

2) La ecuación $[x+1]\,q(x) = [x+1]^{66}$

Como $[x+1] \in \mathbb{K}$, cuerpo, tiene inverso

$q(x) = [x+1]^{65}$

Por otro lado $|\mathbb{K}^*| = 8$ y $65 = 8\times 8+1$

Luego $q(x) = [x+1]^{8\times 8+1} = ([x+1]^8)^8 [x+1] =$

$= [x+1]$.

Teorema de Euler