DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL II.

1.- Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifica que $f(\pi)=1$ y $f'(\pi)=3$. Sea $g(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$. ¿ $g'(\pi)=$ ....?

a)g no es derivable en $x=\pi$ b)$g'(\pi)=-3$ c)$g'(\pi)=-2$ d)$g'(\pi)=3$.

2.- Una gota esférica de rocío se evapora a un ritmo proporcional al área de su superficie. Prueba que el radio decrece a un ritmo constante (**Indicación:** el volumen de la esfera es $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ y su superficie es $S(r)=4\pi r^2$; la hipótesis lo que dice es que $V'=-KS$ donde K es un constante positiva, y donde la derivada está referida la tiempo).

3.- Sea $f(x)=|4x-3|-x^2$. Determina los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-3,3]$. ¿Exista $x\in[0,2/3]$ de modo que f(x)= 0?

4.- Calcula el punto de la parábola de ecuación $x^2=4y$ de abscisa no negativa cuya distancia al punto $(0,3/2)$ sea mínima.

5.- En el triángulo isósceles ABC, el lado desigual mide 4cm y la altura que parte de A, 1 cm. Calcula el punto de dicha altura desde el que la suma de distancias a los vértices es mínima.

6.- Halla el rectángulo de mayor superficie que puede inscribirse en un semicírculo teniendo la base apoyada sobre el diámetro.

7.- En un rectángulo de 4m de perímetro, se sustituye cada lado por semicircunferencias exteriores. ¿Entre qué valores está comprendida el área de la nueva figura?

8.- Prueba que $f(x)=x^2-x\operatorname{sen}x-\cos x$ tiene exactamente dos ceros (o raíces).

9.- Un fabricante envasa en botes cilíndricos de un litro de capacidad lo mejor de la cosecha de tomates de su pueblo ¿Qué dimensiones tendrán las latas para que el coste del material sea mínimo?

10.- Calcula dos números $x,y\in\mathbb{R}$ de suma dada tales que

a)xy sea mínimo. a)x^2+y^2 sea mínimo c)x^2+y^2 sea máximo.

11.- Prueba que si f' es continua en $[0,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$, entonces f es uniformemente continua en $[0,\infty)$.

12.- Se considera $f(x)=e^{-x^2}$ y x_0 y x_1 números reales con $x_0<x_1$. Deduce que la pendiente de la recta que une los puntos $(x_0,f(x_0))$ y $(x_1,f(x_1))$ es seguro distinta de

a)0 b)$-1/2$ c)1 d)1/2.

13.- Sea la función $f(x)=3x^3+x+1$ en el intervalo $[0,3]$. Ninguna de las rectas tangentes a la gráfica de f es paralela a la recta

a)$y=37x$ b)$y=90x$ c)$y=0$ d)$y=\frac{119}{2}x$.

14.- Sea una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de modo que existe $M>5$ que verifica que

$$\frac{1}{M}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le M,\qquad \text{para todo par}\quad x,y\in(a,b).$$

Si $c\in(a,b)$, entonces la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(c,f(c))$ **no** puede ser

a)$y=x+f(c)-c$ b)$y=\frac{M^2+1}{2M}+f(c)$

c)$y=\frac{-M}{3}(c-x)+f(c)$ b)$y=\frac{-M}{4}(c-x)+f(c)+\frac{Mc}{4}$.

15.- De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que es derivable en todo $\mathbb{R}$, que $f(0)=0$, f'(0)=7 y que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$. Determina si existe $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ para los cuáles

$$f(x_0)-f(y_0)=36(x_0-y_0).$$

16.- Se consideran la funciones $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprueba que existe
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{pero } \textbf{no} \text{ existe} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

17.- Si f es derivable en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x) = A$, calcula:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x+1) - f(x)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

c) Demuestra que $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0$.

18.- Calcula: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln(e^{x+\pi} + 1) - \ln(e^x + 1)$.

19.- Supongamos que $f(a) = g(a)$ y que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestra que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

20.- Un vehículo entró en un tunel a las 13h25' y sale a las 13h28', lo cuál queda registrado por las cámaras instaladas en ambas bocas del túnel de 4 100 m de longitud. El dueño del vehículo recibió un multa por importe de 600 euros por rebasar la velocidad permitida de 70 km/h dentro del túnel. ¿Recurrió el dueño la multa?

21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} x^{-4}(\sqrt{2\cos x^2} - \sqrt{2})$ d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - \sqrt{x}}$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^3 x + xe^{x^2}}{x + \cos^2 x - e^x}$.

22.- ¿Donde se encuentra el error en la siguiente"aplicación" de la regla de L'Hôpital?
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

23.- Halla $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, donde $g(0) = g'(0) = 0$.

24.- Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ una función polinómica, con puntos singulares $-1, 1, 2, 3, 4$ de mod que $f(-1) = 6, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4$ y $f(4) = 3$. traza la gráfica de f distinguiendo los casos n par y n impar.

25.- a) Demuestra que dos funciones polinómicas de grados m y n respectivamente se cortan a lo sumo en $\max\{n, m\}$ puntos.

b) Para cada m y n encuentra dos funciones polinómicas de grados m y n que se corten $\max\{m, n\}$-veces.

26.- Sea f una función continua y derivable en $[0, 1]$ tal que $f(x) \in [0, 1]$ para todo x y que $f'(x) \neq 1$, también para todo x. Demuestra que existe un único número $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

27.- Demuestra que $1/9 \leq \sqrt{66} - 8 \leq 1/8$.

28.- Se considera una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Prueba que:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$