INTEGRALES DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

1.- Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Sea $P([a, b])$ el conjunto de todas las particiones del intervalo. Si $P_1, P_2 \in P([a, b])$ se dice que P_1 es menos fina que P_2 ($P_1 \leq P_2$) si $P_1 \subseteq P_2$.
a) Prueba que "$\leq$" es una relación de orden sobre $P([a, b])$ (Indicación: prueba que "$\leq$"es reflexiva, antisimétrica y transitiva).
b) ¿$(P([a, b]), \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado? (Indicación: ¿Para todo par $P_1, P_2 \in P([a, b])$, o bien $P_1 \subseteq P_2$ o bien $P_2 \subseteq P_1$?).
c) Prueba que para todo par $P_1, P_2 \in P([a, b])$, existe P_3 tal que $P_1 \subseteq P_3$ y $P_2 \subseteq P_3$.

2.- Sea $f(x) = 1$ si $x \in [0, 2]\backslash\{1\}$ y $f(1) = 2$.
a) Dibuja la gráfica de f.
b) Calcula el área del rectángulo $[0, 2] \times [0, 1]$.
c) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se considera la partición del intervalo $[0, 2]$

$$P_k = \{\, 0, 1 - 1/k, 1 + 1/k, 2\, \}.$$

Sea

$$S_k = 1 \times [(1 - 1/k) - 0] + 2 \times [(1 + 1/k) - (1 - 1/k)] + 1 \times [2 - (1 + 1/k)].$$

¿Que área, dibújala, se corresponde con el valor de S_k?
d) Calcula $\lim_{k\to\infty} S_k$
e) ¿Coinciden los valores de b) y d)?

3.- Si

$$[x] = \max\{\, k \in \mathbb{Z} \ :\ k \leq x\, \},$$

representa la parte entera del número x, calcula $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$ y $\displaystyle\int_1^n x[x]dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

4.- Prueba que $1/2 \leq \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx \leq 1$ y que $\dfrac{\pi}{2} \leq \displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx \leq \pi$.

Encuentra cotas superiores e inferiores para las siguientes integrales:
a) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx$.

5.- Una función F se llama *primitiva* de otra función f si $F' = f$. Calcula primitivas de las siguientes funciones:

a)x b)x^2 c) $\operatorname{sen} x$ d) $\cos x$ e)$\frac{1}{1+x^2}$ f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ g)$\frac{1}{x}$ h)$x^2 + 1$.

6.- Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. Prueba que f es integrable en $[0, 1]$.

7.- Sea $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (0, 1/2] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \end{cases}$. Prueba que $\displaystyle\int_0^1 g = 1/2$.

8.- Analiza la integrabilidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1) \\ x - 2 & \text{si} \quad x = [1, 2] \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1]\backslash\mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si} \quad x = p/q \in [0, 1], \text{fracción irreducible.} \end{cases}$$

9.- Demuestra que una función monótona definida sobre $[a, b]$ es integrable Riemann.

10.- Demuestra que la composición de una función g integrable en $[a, b]$ y otra f continua en $\mathbb{R}$ es integrable.

11.- Supongamos que f es una función acotada en $[a,b]$ y que para todo $c \in (a,b]$, la restricción de f a $[c,b]$ es integrable. Demuestra que f es integrable en [a,b] y que

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.$$

12.- Calcula, utilizando la definición de integral, $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ y $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$.

(**Utilizar** que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1/6)n(n+1)(2n+1)$ y que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4/4 + n^3/2 + n^2/4$).

13.- Sea una función f continua en $[0,1]$. Prueba que: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f.$

14.- Utiliza el ejercicio anterior para expresar cada uno de los siguientes límites como una integral:

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

15.-Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua de manera que toda función g integrable sobre $[a,b]$ verifica que $\displaystyle\int_a^b fg = 0$. Demuestra que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

16.- Sean $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas con f y h integrables. Prueba que:

a) Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y además $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b h$, entonces g es integrable y $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

b) Existe μ con $\inf f \le \mu \le \sup f$ de modo que $\displaystyle\int_a^b = \mu(b-a)$.

c) Si f es continua, entonces existe $c \in [a,b]$ de modo que $\displaystyle\int_a^b = f(c)(b-a)$.

17.- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable en $[a,b]$ si

a) Para todo $\epsilon > 0$ existe $P \in P([a,b])$ de modo que $\int_a^b f - S(f,P) < \epsilon$.

b) Existe $\sup\{I(f,P) \ : \ P \in P([a,b])\}$.

c Para todo $\epsilon > 0$ existe $P \in P([a,b])$ de modo que $I(f,P) - S(f,P) < \epsilon$.

d $\underline{\int_a^b} f \ge \overline{\int_a^b} f$.

18.- Acudiendo a razonamientos geométricos, demuestra que:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^{1/n} dx = 1, n \in \mathbb{N}.$ b) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx + \int_0^1 e^x dx = e.$

19.- Prueba si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

a) f es integrable, $f \ge 0$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y con una cantidad finita de discontinuidades, entonces es integrable.

20.- a) Hallar una función f no integrable tal que $1f1$ sea integrable.
b) Halla dos funciones f y g integrables tales que $g \circ f$ no sea integrable.

21.- ¿Cuál de las siguientes funciones **no** es integrable Riemann en el intervalo $[0,2]$?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

22.- Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de modo que $f + g$ es integrable en $[a,b]$. En esta situación que es correcto:

a) f y g son integrables en $[a,b]$.

b) $\displaystyle\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$

c) $\displaystyle\int_a^b \lambda(f+g) = \lambda \int_a^b f + g$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $f - g$ es integrable en $[a,b]$.

23.- a) Da un ejemplo de una función integrable en $[0,2]$ de modo que f no sea continua en todos los puntos, que no sea constante en todos los puntos salvo quizas en un conjunto finito, y tal que $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 2$.
b) Da un ejemplo de una función $f : [3,7] \to \mathbb{R}$ acotada, pero que no sea integrable en $[3,7]$. ¿Por que no es integrable?