

NÚMEROS NATURALES. INDUCCIÓN. CONJUNTOS ORDENADOS.

1.- A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales:

1) $A = \{2n : n \geq 5\}$ 2) $\{2k^2 + 7 : 8 \geq k \geq 2\}$

¿Cuál es el elemento más grande en cada conjunto?

B) Observa el subconjunto de números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos? ¿Existe alguno que sea el más grande?

2.- ¿Cuál de las siguientes igualdades **no** es cierta?

a) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ b) $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$

c) $(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$ d) $(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} y^{n+1-k} x^{k-1}$.

3.- Prueba que si $n \geq 2$ y x e y son números reales entonces se verifica que:

$$x^n - y^n = (x - y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-(k+1)} y^k \right).$$

4.- Resuelve las siguientes preguntas por inducción:

a) ¿Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos?

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

d) Si $n \geq 4$, entonces $2^n \geq n^2$ (ver antes que $2n^2 \geq (n+1)^2$ para n mayor o igual a 4).

e) $1^r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, si $r \neq 1$ (para $r = 1$ la suma no presenta problemas). Además de la inducción, deduce la igualdad anterior escribiendo $S = 1^r + r^2 + \dots + r^n$, multiplica rS y despeja S de estas dos ecuaciones.

5.- Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9 b) $5^n - 1$ es múltiplo de 4

c) $7^n - 6n - 1$ es múltiplo de 36 d) $n^5 - n$ es múltiplo de 5

e) $2^{2n+1} + 1$ es múltiplo de 3 f) $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es múltiplo de 21 .

vspace3mm

6.- Algunas de estas afirmaciones son ciertas otras falsas. Decide de que tipo es cada una de ellas y justifica tu respuesta.

Para cuálesquiera enteros positivos p y n se tiene que:

a) n^2 es par si y solo n es par.

b) $(n+p)^2$ es par si y solamente si $(n-p)^2$ es par.

c) Si np es impar, entonces $n+p$ es par.

d) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces np es par.

e) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces n y p son pares.

7.- Demuestra que cualquier número de botellas mayor que 7 se puede envasar en cajas con capacidad para 3 y 5 botellas

8.- ¿Qué números natural verifican que $n^2 + n + 1 \leq 2^n - 3$?

9.- Prueba por inducción las siguientes igualdades y desigualdades, siendo en todos los casos $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + (n/2) \leq 1 + (1/2) + (1/3) + \dots + (1/2^n) \leq n + 1.$

b) $(1 + a)^n \geq 1 + an,$ para $a > 0.$ c) $2^{2n} > n^2.$

d) $\binom{n}{k} x^k - \binom{n}{k+1} x^{k+1} + \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n} x^n \geq 0,$ donde $0 \leq x \leq 1, k = 0, 1, 2, \dots, n$

e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

f) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

10.- Sobre el conjunto de rectas del plano \mathbb{R}^2 se define la relación ser paralelas (e.d. dos rectas r y s están relacionadas si y solo si son paralelas). Prueba que esta relación es de equivalencia. ¿Cómo son las clases de equivalencia? ¿Y el conjunto cociente asociado?

11.- Sea X un conjunto. Se considera $P(X)$ el conjunto de partes de X . Sobre $P(X)$ se define la relación R del siguiente modo: $A, B \in P(X)$ están relacionados si $A \subset B$ (ARB). Prueba que ésta es una relación de orden. ¿El orden generado es total o parcial?

12.- Sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Se define la relación R sobre A del siguiente modo: $x, y \in A$ están relacionados xRy si y solo si $f(x) = f(y)$. Prueba que ésta es una relación de equivalencia. Describe los elementos del espacio cociente asociado.

13.- Prueba que si A está bien ordenado, entonces A está totalmente ordenado. ¿Es cierto el recíproco?

14.- Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Se define el conjunto de particiones de $[a, b]$ por:

$$P([a, b]) = \{ P = \{ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \} : t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \}.$$

Sobre $P([a, b])$ se define la relación " \leq " siguiente: $P_1 \leq P_2$ si y solo si $P_1 \subset P_2$ donde $P_1, P_2 \in P([a, b])$. Prueba que " \leq " es una relación de orden. ¿Es un orden total o parcial? Prueba que para todo par $P_1, P_2 \in P([a, b])$ se puede encontrar otra partición $P_3 \in P([a, b])$ de modo que $P_1 \leq P_3$ y también $P_2 \leq P_3$.