FUNCIONES ELEMENTALES. SENO Y COSENO.

1.- Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arctan(\,\tan(x)\arctan(x)\,)$ b) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

2.- Calcula los límites que se indican:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + (x^2/2)}{x^4}$ b) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x})$

3.- Dada la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, con $f(0) = 0$, calcula si es posible $f'(0)$ y $f''(0)$.

4.- Halla, si existen, $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$ y $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^{1/2})dt}{\operatorname{sen}^2 x}$.

5.- Determina, si existen, $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

6.- Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x/2)$ c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

d) $f(x) = \tan x - x$ e) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ f) $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$.

7.- Demostra que $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

8.- Deduce las fórmulas de $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 3x$ y $\cos 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Prueba que $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$.

9.- a) Expresar $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ en función de $\cos 2x$.

b) Deduce de a) que $\cos x/2 = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ y que $\operatorname{sen} x/2 = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

10.- Prueba que para todo par de números A y B existen a y b tales que $A \operatorname{sen}(x + B) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$.

11.- Prueba que si $x, y, x + y$ no son de la forma $k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

12.- Escribe $\operatorname{sen}(\arctan x)$ y $\cos(\arctan x)$ de manera que no aparezcan funciones trigonométricas.

13.- Comprueba que si $\tan x/2 = u$, entonces $\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$ y $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

14.- a) Demuestra que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

b) Prueba que si $x \neq y$, entonces $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x - y|$.

15.- Traza las gráficas de las funciones trigonométricas:

a) $\sec x$ b) $\tan x$ c) $\operatorname{cosec} x$ d) $\cot x$ (cotangente).

16.- a) Prueba que para $0 < x < \pi/4$ se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}.$$

b) Deduce que $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ y que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.