# FUNCIONES ELEMENTALES. LA EXPONENCIAL.

**1.-** Calcula la derivada de las funciones:
a) $f(x) = e^{e^x}$ b) $f(x) = \ln(\ln(1 + \ln(1 + e^{1+e^{1+x}})))$ c) $f(x) = e^{\int_0^x e^{-t^2}}\, dt$
d) $f(x) = \operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen}(x^{\operatorname{sen} x})})$ e) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ f) $f(x) = \lg_{(e^x)}(\operatorname{sen} x)$.

**2.-** Calcula los siguientes límites:
a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^3}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{x^3}$.

**3.-** Dibuja las gráficas de las funciones:
a) $e^{x+1}$ b) $e^{\operatorname{sen} x}$.

**4.-** Se consideran las funciones:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \textit{seno hiperbólico} \qquad \text{y} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{coseno hiperbólico}.$$

La *tangente hiperbólica* se define por $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$.

**a)** Traza las gráficas de las tres funciones anteriores.

**b)** Comprueba que:

1) $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ 2) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ 3) $\tanh^2 x + \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1$
4) $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ 5) $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$ 6) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$.
7) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$ 8) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

**c)** Prueba que la función $\operatorname{senh} x$ admite una función inversa que está definida en toda la recta real y que la función $\cosh x$ admite una función inversa definida en $[1, \infty)$.

**d)** Comprueba que: 1) $\operatorname{senh}(\cosh^{-1}) = \sqrt{x^2 - 1}$ 2) $(\operatorname{senh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
3) $\cosh(\operatorname{senh}^{-1}) = \sqrt{x^2 + 1}$ 4) $(\cosh^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ si $x > 1$.

**e)** Halla una fórmula explícita de $\operatorname{senh}^{-1}$ y de $\cosh^{-1}$ (estas funciones suelen denominarse *argumento del seno hiperbólico* y *argumento del coseno hiperbólico*). **Indicación:** ten en cuenta el Ejercicio 7.

**5.-** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f$ definida por:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} \qquad \text{si} \qquad x > \qquad \text{y} \quad x \neq 1,$$

$f(1) = 1$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

**6.-** Se considera la función $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.
a) Prueba $f$ es derivable y calcula $f'$ y $f''$.
b) Demuestra por inducción sobre $n$ que existe la derivada $n$-ésima de $f$ en cero y que $f^{n)}(0) = 0$.

**7.-** Prueba que:
a) $(\tanh^{-1})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$, si $|x| < 1$.
b) $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.
c) Usando lo anterior calcula $\int_a^b \frac{dx}{1-x^2}$, para $|a|, |b| < 1$.

**8.-** Comprueba que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})$. Integra esta función en $[a, b]$ y compara con el problema anterior.

**9.-** Prueba que $\frac{e^x}{x^n} > \frac{e^n}{n^n}$ si $x > n$.

**10.-** ¿Por qué la función $\ln x$ es uniformemente continua en $[1, \infty)$ y no lo es en $(0, 1]$?

**11.-** Calcula las soluciones de la ecuación:

$$e^{\frac{-1}{(1-x^2)^2}} = \frac{1}{4}.$$

**12.-** Calcula $f'(x)$, $x \neq 0$, para la función $f(x) = \ln |x|$.

**13.-** Prueba que si $f' = cf$, para $c \in \mathbb{R}$ una constante, entonces $f(x) = Ke^{cx}$.

**14.-** Comprueba que $\lim_{x\to\infty}(1 + a/x)^x = e^a$ y que $\ln b = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$.

**15.-** Sean $x_1, x_2, ....x_n > 0$ y $p_1, p_2, ..., p_n > 0$ con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
a) Prueba que $x_1^{p_1} x_2^{p_2} .....x_n^{p_n} \leq p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$.
b) Deduce que $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + .... + x_n)$.

**16.-** Se considera una función dos veces derivable $f$ sobre $\mathbb{R}$ de modo que $f'' - f = 0$ y $f(0) = f'(0) = 0$.
a) Prueba que $f^2 - (f')^2 = 0$.
b) Prueba que si, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(c) = c^{-x}$ o $f(x) = ce^x$ para alguna constante $c$ y para todo $x \in (a, b)$.
c) Supongamos que existe $x_0$ de mod que $f(x_0) \neq 0$. Deduce que existe $a \in [0, x_0)$ de modo que $f(x) \neq 0$ si $x \in (a, x_0)$ y $f(a) = 0$.
d) Deduce de B) y c) que $f = 0$.

**17.-** Prueba que si $f'' - f = 0$, entonces $f(x) = ae^x + be^{-x}$ para cierto valores $a, b \in \mathbb{R}$. Deduce que existen $A; B \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = A \cosh x + B \operatorname{senh} x$.