## INTEGRALES IMPROPIAS.

**1.-** Para cada una de las integrales siguientes, decide si es, o no es, impropia y calcula su valor para la que sea convergente:

a) $\int_0^1 \ln x dx$, b) $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}dx$, c) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$,

d) $\int_0^1 x\ln x dx$, e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, f) $\int_0^3 \frac{x-2}{x^2-3x+2}dx$,

**2.-** Prueba que si las expresiones involucradas existen, se verifica la versión ïmpropia"de integración por partes siguientes:

$$\int_a^\infty u'v = uv\Big|_a^\infty - \int_a^\infty uv'.$$

**3.-** Calcula las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$, b) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, c) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$, d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, e) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$,

f) $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x dx$, g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2}$, h) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}dx$, i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x\ln x}$, j) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$,

k) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x}}$, l) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$, m) $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$, con $n\in\mathbb{N}$.

**4.-** Comprueba que: a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x dx = -\frac{1}{9}$.

**5.-** Para un cierto valor real $C$, la integral $\displaystyle\int_2^\infty (\frac{Cx}{x^2+1}) - \frac{1}{2x+1}dx$ es convergente. Determina $C$ y el valor de la integral.

**6.-** Estudia si existen las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^1 x^p dx$, b) $\int_1^\infty x^p dx$, c) $\int_0^\infty e^{ax}dx$, d) $\int_1^\infty \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-x+1}}dx$, e) $\int_{-1} 1^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$,

f) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx$, g) $\int_0^1 x\ln x\, dx$, h) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$, i) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$, j) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^2 x}$,

k) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx$, l) $\int_0^\infty e^{-x}\ln(\cos^2 x)\, dx$, m) $\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{1}{x}dx$.

**7.-** Determina si son, o no son, convergentes las siguientes integrales impropias:

a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\, dx$, b) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{x^3}\, dx$, c) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}dx$.

**8.-** Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función decreciente e integrable (impropia) en $(0,\infty)$, con $f\geq 0$. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

**9.-** ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

**a)** La integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx$ diverge siempre.

**b)** Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $f$ es continua en $[0,\infty)$, entonces $\int_0^\infty f(x)dx$ es convergente.

**10.-** a) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable (impropia) en $(0,\infty)$ de modo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Demuestra que $l=0$.

b) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable (impropia) en $(0,\infty)$, con $f\geq 0$. ¿Existe siempre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ?

c) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función uniformemente continua e integrable (impropia) en $(0,\infty)$. ¿Existe siempre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ?

**11.-** Se consideran las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in[10/3,14/3] \\ \\ 0 & \text{si} \quad x\notin[10/3,14/3] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{-x^2+8x-15}{|x-4|}.$$

¿Para que valores $A$ la siguiente integral es convergente $\int_A^\infty f(x)g(x)dx$ ?

a) Cualquier $A\in\mathbb{R}$. b) $A=14/3$ c) $A=3$ d) $A=13/3$.

**12.-** Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas en $(a,b)$ tales que las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son finitas. Muestra con un ejemplo que, en general, la integral $\int_a^b fg$ no tiene por qué ser finita.

**13.-** Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función positiva ($f\geq 0$), decreciente e integrable en $[0,\infty)$.
a) Se define la función $g(x)=f([x]+1)$, donde $[x]$ es la parte entera de $x$ con $x\in[0,\infty)$. Prueba que

$$\int_0^\infty f(x)dx\geq\int_0^\infty g(x)dx.$$

b) Deduce de a) que si $\int_0^\infty f(x)dx<\infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente.
c) Estudia la convergencia de las series:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^k}$, para $k>0$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^3}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(\ln n)^2}{n}$.

**14.-** Usando la definición de logaritmo como una integral prueba que existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n=C$$

($C$ se llama constante de Euler).

**15.-** Estudia la convergencia de $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$, según los distintos valores $p\in\mathbb{R}$.

**16.-** ¿Cuál de las siguientes integrales es convergente?

a) $\int_{-1}^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}dx$ b) $\int_2^\infty \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^3+2x+1}dx$ c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx$ d) $\int_{-0}^\infty \operatorname{sen} x\,dx$.

**17.-** Se considera $f(x)=\frac{1}{x+\operatorname{sen} x}$. Elegi la expresión correcta:

a) $\int_0^1 f(t)\,dt<\infty$ b) $\int_1^\infty f(t)\,dt<\infty$ c) $\int_\pi^{2\pi} f(t)\,dt<0$ d) $\int_0^{1/2} f(t)\,dt>1/3$.

**18.-**Si conocemos que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula las integrales impropias
a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$ (Indicación: $u=\frac{x-\mu}{\tau}$). b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}dx$

**19.-** Para cada $x>0$ se define

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

**a)** Prueba que $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ y $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ son finitas.

**b)** Usando el Problema **2**, prueba que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

**c)** Calcular $\Gamma(1)$ y deducir que $\Gamma(n)=(n-1)!$ (Esta función se conoce con el nombre de función *gamma de Euler*).

**d)** Hacer la sustitución $u = t^x$ para deducir que:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}du \qquad \text{y} \qquad \Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$$

**20.-** Sean $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ y su transformada de Laplace $Lf(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$, $s > 0$.

a) Calcula $Lf(s)$ para $f(x) = x$, $\quad f(x) = x^2$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.

b) Si $f'$ es la derivada de $f$, calcula una expresión de $Lf'(s)$, suponiendo que

$$\text{lím}_{x\to\infty} f(x)e^{-sx} = 0, \qquad s > 0.$$