APROXIMACION POR FUNCIONES.

1.- Desarrolla las siguientes funciones en series de Taylor de los binomios que se indican:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, para $x + 4$ b) $f(x) = \ln x$, para $x - 1$

c) $f(x) = 1/x$, para $x - 1$ d) $f(x) = 1/x^2$, para $x + 1$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, para $x - 4$ f) $f(x) = \cos x$, para $x - \frac{\pi}{2}$.

2.- Expresa los polinomios de Taylor en a de las siguientes funciones en términos de $a_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!}$ y $b_k = \frac{g^{k)}(a)}{k!}$:

a) $f + g$ b) fg c) f' d) $\int_a^x f(t)dt$ e) $\int_0^x f(t)dt$

3.- Sea $f : [a - \delta, a + \delta] \to \mathbb{R}$, una función tres veces derivable, y sea $P_{2,a}(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 centado en a de la función f. Entonces:

a) las rectas tangentes a las gráficas de f y $P_{2,a}$ por el punto $(a, f(a))$ son la misma.

b) $f(x) = P_{2,a(x)}$ para todo $x \in [a - \delta, a + \delta]$.

c) $f^{k)}(a) = p_{2,a}^{k)}(a)$ para todo $K = 0, 1, 2$ y 3.

d) $\lim_{a\to\infty} f(x) - P_{2,a}(x) = 0$.

4.- a) Comprueba que $e \in (2, 3)$.

b) Demuesta que e es irracional. **Indicaciónes:** 1) Supongamos que $e = \frac{p}{q}$. Tomamos $n > \max\{q, 3\}$, trata de probar que

$$\frac{n!p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \ldots.. + \frac{n!}{n!} + n!R_n$$

donde

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

2) Hay que llegar a una contradicción con el hecho de que $n!R_n$ es un entero y que $0 < n!R_n < 1$.

5.- Sea f derivable en $\mathbb{R}$. Prueba que si $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, entonces $f = 0$.

6.- Prueba que si $g(a) = 0$ y si $|x - a| < \delta$ implica que $|g'(x)| \leq M|x - a|^n$, entonces

$$|g(x)| \leq \frac{M|x - a|^{n+1}}{n+1} \qquad \text{para todo} \quad |x - a| < \delta.$$

7.- Deduce del problema anterior que:

a) si $\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(x-a)^n} = 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$.

b) Si $g(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$, entonces

$$g'(x) = f'(x) - P_{n,a,f'}(x),$$

donde $P_{n,a,h}(x)$ es el polinomio de Taylor de de h centrado en a de orden k.

8.- Estudia la convergencia puntual de las sucesiones de funciones siguientes:

a) $f_n(x) = x^n$, con $x > 0$. b) $f(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n \\ 2 - nx & \text{si} \quad 1/n \leq 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n < x \leq 1. \end{cases}$

9.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones de funciones:

a) $f_n(x) = n(x-1)^n$ b) $f_n(x) = 1 - \frac{x}{n}$ c) $f_n(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{n}$

d) $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-x/n}$, con $x \geq 0$ e) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, con $x \geq 0$ f) $f_n(x) = \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

g) $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n \\ 0 & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$

10.- Prueba que si f_n converge uniformemente a f y g_n converge uniformemente a g, el producto $f_n g_n$ puede **no** converger uniformemente a fg.

11.- Demuestra que una sucesión de funciones acotadas puede converger a una función no acotada. ¿Y si la convergencia es uniforme?

12.- Dada la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas sobre $[0,1]$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si} \quad 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Estudia la convergencia uniforme en $[r, 1]$ con $r \geq 0$.
b) Comprueba si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

13.- a) Encuentra expresiones en forma de serie de:

1) $\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$, con $a > 1$. 2) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

b) Calcula: 1) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ con un error menor que $0,0001$ 2) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ error $< 0,0001$
3) $\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3} dx$ error $< 0,0001$.

14.- Sea $f_n(x) = \begin{cases} 2n^3 t & \text{si} \quad t \in [0, < 1/(2n)] \\ -2n^3(t - (1/n)) & \text{si} \quad t \in [1/(2n), 1/n] \\ 0 & \text{si} \quad t > 1/n. \end{cases}$ La sucesión $f_n)_n$

a) converge puntualmente a 0 en $[0,1]$,

b) converge uniformemente a 0 en $[0,1]$,

c) converge uniformemente a $\frac{1}{4t^2}$ en $[0,1]$,

d no converge puntualmente en algún punto de $[0,1]$.

15.- ¿Cuál de las siguientes sucesiones de funciones **no** converge uniformemente en $[0,1]$?

a) $f_n(x) = 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ b) $f_n(x) = x^n/n$ para $n \in \mathbb{N}$

c) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ para $n \in \mathbb{N}$ d) $f_n(x) = \frac{x+1}{nx^2-3n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

16.- La sucesión de funciones $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{n}(x-1)^k$

a) comverge puntualmente en todo $\mathbb{R}$,

b) converge uniformemente en $[1, 2]$,

c) converge absolutamente en $(0, 2]$,

d) solo converge en $x = 1$.

17.- Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$, ¿ $f^{5)}(0) = ...$?

a) 600   b) 5   c) 500   d) 25.