SERIES DE FUNCIONES.

1.- Estudia la convergencia puntual y uniforme de las siguientes series de funciones $\sum_n f_n(x)$ en los intervalos que se indican:

a) $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, en $\mathbb{R}$ b) $f_n(x) = \frac{1}{n^2x^2}$, en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ c) $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$, en $[-M, M]$

d) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, en $(1, \infty)$ e) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, en $[0, a]$ con $a < 1$; también en $[0, 1]$.

2.- ¿Cuál de las siguientes series de funciones converge uniformemente en el intervalo $[50, 72]$?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+1}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx-1}{2+\operatorname{sen} n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{n!}$

3.- Se considera $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1}$.

a) Halla el dominio de convergencia absoluta de la serie.

b) ¿En que intervalo hay convergencia uniforme?¿Donde no hay convergencia uniforme? ¿Donde es f continua?

4.- Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \operatorname{sen} nx$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(1+\cos^2 x)$.

5.- Comprueba que la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$, para $x \in \mathbb{R}$, tiene derivada continua.

6.- Escribe en forma de serie las siguientes integrales:

$$\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \qquad \text{y} \qquad \int_1^a \frac{e^{-x^2}}{x} dx$$

7.- Estudia si la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$, para $x \neq 0$ y f(0) =1, es desarrollable en serie de potencias en x.

8.- Encontra los intervalos de convergencia de las siguientes series de potencias. Determinar la convergencia en los extremos.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ f) $\displaystyle\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^4}{3^2} + \frac{x^5}{2^3} + \frac{x^6}{3^3} + \ldots.$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

9.- Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, en los siguinetes casos:

a) $a_n = 1/n^n$ b) $a_n = n^n/n!$ bc $a_n = 1/n^{n/2}$

d) $a_n = 1$ si n es un cuadrado de un número natural y $a_n = 0$ en otro caso.

e) Si $a_n = 1$ cuando $n = m!$ para $m \in \mathbb{N}$ y a $= 0$ en otro caso.

f) Si $a_{2n+1} = \displaystyle\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot .... \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot ...... \cdot 2n}$ y $a_{2n} = 0$, para $n \geq 1$.

10.- Sean las series de funciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^2.$$

Comprueba que la primera serie converge en $[-1,1]$; que la tercera no converge en ningún punto de $[-1,1]\setminus\{0\}$ y que para la segunda hay al menos un punto de $[-1,1]$ en la que la serie no es convergente

11.- Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$. Comprueba que su radio de convergencia es infinito. Si se denota por f la función suma, comprueba que

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0 \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

12.- Calcula la derivada décima de la función $f(x) = x^6 e^x$ en $x = 0$.

13.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de modo que existen α y β de modo que

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 0 \qquad \text{para cada} \qquad n \geq 2:$$

a) Demuestra que esta serie tiene radio de convergencia no nulo.

b) Demuestra que si x es un número real en el que la serie es convergente, la suma de la serie, $S(x)$, verifica que:

$$(1 + \alpha x + \beta x^2) S(x) = a_0 + (\alpha a_0 + a_1) x.$$

14.- Demuesta que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

15.- Determina los radios de convergencia y las funciones suma de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+1) x^{n-1}$.

16.- ¿Cuál de las siguientes funciones **no** es continua en $x = 2$?

a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt$ b) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

b) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|t-2|}} dt$ d) $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{n}.$

17.-Representar la gráfica de la función $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n)!}.$