NÚMEROS COMPLEJOS.

1.- Calcula:

a) $Re(1+i)$ b) $Im(3-2i)$ c) $\overline{3-2i}$ d) $(1+i)(3-2i)$

e) $1/i$ f) $\frac{1-i}{1+i}$ g) $\frac{2}{1-3i}$ h) $(1+\sqrt{3}i)^3$.

2.- En cada caso, determina x y y reales que verifican:

a) $x+yi = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ b) $x+yi = |x-yi|$ c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = |x-yi|$.

3.- Halla el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

a) $3+4i)$ b) $(3+4i)^{-1}$ c) $(1+i)^5$ d) $|3+4i|$ e) $\frac{1+i}{1-i}$.

4.- Determina los números complejos z que verifican:

a) $z^2 = 3-4i$ b) $z^2+zi+2=0|$ c) $z^4-2z^2+4=0$.

5.- Los tres números complejos $3+4i, 1$ y i son vértices de un triángulo en
$\mathbb{C}$. Al girar dicho triángulo $\pi/6$ alrededor del origen, ¿cuales serán los vértices del triángulo que obtenemos?

6.- Calcular:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{-2+2i}$ c) $\sqrt[4]{-4+3i}$ d) $(1-i)^{-1/2}$

e) $(-1+i)^{8/3}$ f) $(1-i)^{-3/2}$ g) $(-\sqrt{3}-i)^{-2/3}$.

7.- Describi los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

a) $|z| < 1 - Rez$ **b)** $Im\frac{z-a}{z-b} = 0,$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$ fijos.

c) $|z-a| + |z-b| = r,$ donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ son fijos.

d) $Re\frac{z-a}{z-b} = 0$, para $a, b \in \mathbb{C}$ fijos. **e)** $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$.

8.- a) Demuestra que las raíces n-ésimas de un núumero complejo no nulo se obtienen mul tiplicando una de ellas por las raíces n-éesimas de 1.

b) Prueba que el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

c) Prueba que la inversa multiplicativa de una raíz n-ésima de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

9.- Resuelve los problema **4,5,6** de la Hoja-3 y el **8** de la Hoja-4 para $x, y, z \in \mathbb{C}$. ¿Qué solución tiene la ecuación del problema **8 g)** siendo x, a, b, c números complejos?

10.- Resuelve las ecuaciones: a) $z^2 - (5-14i)z - 2(12-5i) = 0$ b) $z^n = \overline{z}$.

11.- Sea $z \neq 1$ con $|z| = 1$. Determina si son ciertas las siguientes afirmaciones;

a) $\frac{1+z}{(1-1/z)}$ es imaginario puro. **b)** El número $z + z^{-1}$ es real.

12.- Si $z \in \mathbb{C}$ y $\Re(1/z) > 0$, entonces

a) $z = \overline{z}$ b) $Re(z)Im(z) > 0$ c) $Rez > 0$ d) $< z, 1/z >> 0$.

13.- ¿Cual de los siguientes números es una raíz quinta de $7i$?

a) $\sqrt[5]{7}(\cos(2\pi/3) + \operatorname{sen}(2\pi/3)i)$ **b)** $\sqrt[5]{7}(\cos(3\pi/2) + \operatorname{sen}(3\pi/2)i)$

c) $\sqrt[5]{7}(1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2})i)$ **d)** $-\sqrt[5]{7}i$.

14.- Describe la situación de los números complejos que cumplen que:

a) $|z-1| = 2$ b) $|z-1| = |z+1|$ c) $\overline{z} = -z$ d) $\overline{z} = z^{-1}$.

15.- Sean z y w dos números complejos. Prueba que:

a) $|\,|z| - |w|\,| \leq |z-w|$ y $|\,|z| - |w|\,| \leq |z+w|$

b) $|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (Regla de paralelogramo).

16.-Sean z, v y w tres números complejos tales $|z| \leq |w|$. Decide si son ciertas o no las siguientes desigualdades; justifica la respuesta:

a) $|zv| \leq |wv|$ b) $|z+v| \leq |w+z|$.

17.- a) Halla tolas las raíces cuartas de i.

b) Determina el conjunto de números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

c) Demuestra que las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n-ésimas de 1.

18.- Calcula:

a) $\sqrt[5]{-1}$ b) $\sqrt[3]{-2+2i}$ c) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

19.- Sean $1, z_1$ y z_2 las tres raíces cúbicas de 1, con $Argz_1 < Argz_2$. Calcula el número complejo α tal que $\alpha z_2 = 1$.

20.- Expresar $\cos 3t$ y $\operatorname{sen} 3t$ como polinomios de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

21.- Se consideran $z, w, t \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = |w| = |t| = 1$. Comprueba que si $z+w+t = 0$, entonces los tres puntos están situados sobre los vértices de un triángulo equilátero.

22.- a) Prueba que para cualquier número natural n, el polinomio $z-1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

b) Demuestra que la raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son soluciones de la ecuación polinómica $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$.

c) Prueba que si m y n son números naturales y m divide a n, entonces el polinomio $z^m - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

23.- Si $n = 2, 3, 4, ...$; prueba que:

a) $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

b) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + ... + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

24.- El punto del plano con coordenadas polares $r = 2$ y $\theta = 7\pi/6$

a) está en el segundo cuadrante;

b) está alineado con el origen y el punto $r = 7$ y $\theta = \pi/6$;

c) está sobre la circunferencia de centro $(0;0)$ y radio $\sqrt{2}$;

d) dista $7/6$ del $(0,0)$.

25.- ¿Cuál de los siguientes puntos del plano está más alejado del punto i?

a) $-i/3$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}+3i/2$ d) $-1/2+i/2y$.

26.- De un polinomio $P(x)$ se sabe que sus coeficientes son números enteros y que $-6, i$ y $1-2i$ son raíces del polinomio. De este polinomio se puede decir que:

a) P es de grado 3 **b)** $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \infty$

c) P es de grado 5 **d)** el término independiente es divisible por 2.

27.- a) Si z es raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$, prueba que $\overline{z}$ también lo es.

b) Usar el ejercicio **4 b)** para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

28.- Encontrar las soluciones de la ecuación:

$$z^3 = -46 + 9i$$

si se sabe que $z = 2+3i$ es solución de la misma.

29.- Se pide descomponer el polinomio x^4+1 en

a) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$;

b) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$;

c) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Haz lo mismo para los polinomios: x^3+x^2-x+2 y $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.