SUCESIONES II.

1.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+....+3n)$ **b)** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+1n}}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$ **d)** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + ... + \frac{1}{n^2-1}\right)$

e) Si $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a^2}+....+\sqrt[n]{a^n}}{n}$ **f)** $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + ... + \frac{1}{n^2-1})$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$ **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$.

2.- Prueba que la sucesión $(\,(1+1/n)^n\,)_n$ es creciente y acotada superiormente; por tanto convergente. Se define el número e por:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n.$$

3.- Calcula los límites de la sucesiones siguientes:

a) $(\,(1+1/n)^{n+1}\,)_n$ **b)** $(\,(1+1/n)^{2n}\,)_n$ **c)** $(\,(1+3/n)^{2n}\,)_n$

d) $(\,(1+1/2n)^n\,)_n$ **e)** $(\,(1+1/n^2)^{n^2}\,)_n$.

f $((1-\frac{1}{n-1})^{2n})_{n=2}^{\infty}$ **g)** $((\frac{n^2+2n}{n^2+n})^{2n})_{n=1}^{\infty}$.

4.- Dado $x \neq 0$, prueba que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = 1$.

5.- ¿Pueden ser "0" infinitos términos de una sucesión que converge a un número distinto de 0?

6.- Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $(b_n)_n$ es una sucesión acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n x_n = 0$.
Encuentra ejemplos en los que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $(b_n)_n$ es una sucesión **no** acotada y que entonces $\lim_{n\to\infty} b_n x_n = 1$, que $\lim_{n\to\infty} b_n x_n = 0$ o bien que $\lim_{n\to\infty} b_n x_n$ no exista.

7.- Sea $(x_n)_n$ una sucesión de manera que existen un $m_0 \in \mathbb{N}$ y $k \in (0,1)$ de modo que para todo $n \geq m_0$

$$|x_{n+1}| \leq k|x_n|.$$

Prueba que entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

8.- Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales. Prueba que si las subsucesiones $(x_{2n})_n$ y $(x_{2n+1})_n$ son ambas convergentes a un mismo límite x, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Construye una sucesión $(x_n)_n$ divergente de modo que sus subsucesiones $(x_{2n})_n$ y $(x_{2n+1})_n$ son ambas convergentes.

9.- Prueba que si la sucesión $(x_n)_n$ es tal que las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$ y $(x_{3n})_n$ son convergentes, entonces también $(x_n)_n$ es convergente.

10.- Sucesiones recurrentes:

a) Sea $a > 0$. definimos $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ para $n+1 \geq 2$. Prueba que $(x_n)_n$ es creciente y acotada. Calcula su límite.

b) Sea $x_1 > 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$. Prueba que $(x_n)_n$ es convergente. Calcula su límite.

c) Sea $x_1 > 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n^2}$. ¿Es la sucesión $(x_n)_n$ convergente?

11.- Sucesiones recurrentes: A) Determina si las sucesiones siguientes son convergentes o no.
a) $a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+5}$, con $a_1 = 5$. b) $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n^2}$, con $x_1 > 1$.

B) Comprueba que las sucesiones siguientes son convergentes y calcula su límite.
c) $a_n = 1/2(a_{n-1} + 6)$, con $a_1 = 2$. d) $x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n}$ con $x_1 = 2$.

e) $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + m}{2x_n}$ con $x_1 = m > 1$ (Verifica que estamos ante un algoritmo para calcular $\sqrt{m}$).

f) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, con $x_0 > 0$.

12.-Cálculo de raíces cuadradas:
Sea $a > 0$. Se considera la sucesión $(x_n)_n$ dada por $x_1 > 0$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

a) Prueba que $x_n \geq \sqrt{a}$ si $n \geq 2$.

b) Prueba que $x_n - x_{n+1} \geq 0$, si $n \geq 2$.

c) Prueba que la sucesión es convergente y calcula su límite.

13.- La ecuación cúbica $x^3 - 7x + 2 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1 y queremos obtener una aproximación de dicha solución. Esto se puede hacer usando el siguiente procedimiento iterativo: se escribe la ecuación como $x = (x^3 + 2)/7$; se utiliza esta expresión para definir la sucesión $(x_n)_n$ donde $x_1 \in (0, 1)$ y $x_{n+1} = (x_n^3 + 2)/7$ para $n + 1 \geq 2$.

a) Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo n.

b) Prueba que $(x_n)_n$ es contractiva y por tanto convergente (**Indicación:** hay que usar el Teorema del valor medio).

c) Prueba que el límite de la sucesión es la solución de la cúbica y que este límite está comprendido entre 0 y 1.

14.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ **b)** $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b})$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$ **d)** $\lim_{n\to\infty} n^2 a^n$, para $a > 0$ **e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^2}$, para $b > 0$.

15.- Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} n$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}}$ **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

16.-Prueba que toda sucesión no acotada tiene una subsucesión convergente a $\pm\infty$.

17.- Prueba que las siguientes definiciones de continuidad de una función, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, en un punto $x_0 \in (a, b)$ son equivalentes:

a) f es continua en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

b) f es continua en x_0 si para toda sucesión $x_n \to_{n\to\infty} x_0$ se tiene que la sucesión de imágenes

$$f(x_n) \to_{n\to\infty} f(x_0).$$

18.- Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 1} < \sqrt{77/4}\}$. Una sucesión de puntos que **no** están en el conjunto A, pero converge a un punto de A es:

a) $(\frac{3n-1}{n})_n$ b) $(\frac{-2n+3}{3n})_n$ c)$(\frac{2n+3}{3n})_n$ d)$(\frac{1}{2n})_n$.

19.- Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales de modo que $x_{2n} \to x$ y $|x_{2n} - x_{2n-1}| < 1/n$ para todo n. Entonces:

a) $(x_n)_n$ converge a cero. b) $x_{3n} \to_{n\to\infty} x$.

c) $(x_n)_n$ no converge. b) $(x_n)_n$ no es de Chauchy.

20.- Demuestra que si $(a_n)_n$ es una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

Como apliación, calcula los límites de las sucesiones siguientes:

a) $(\sqrt[n]{n!})_n$ b) $\left((\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^{1/n}\right)_n$.

21.- Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

1) con solo un dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción.

2) con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide: a) definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. b) Estudiar la monotonía y acotación de la misma. c) Probar por inducción que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo n. d) Deducir que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$.

22.-Sea sabe que $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n = C$. El límite C tiene nombre se llama constante de Euler. Usando lo anterior (y las propiedades del logaritmo) calcula

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

23.-Calcula el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}..... \sqrt[2^n]{2}$.