EXAMEN Elem. de E.D.O. 4 de Julio 2021.

Nombre y apellidos:...

1.- (2 puntos) Se considera la familia de curvas del plano:

$$x^4y + y^3x^2 + x + 2y = K, \qquad \text{donde} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Encuentra una E.D.O. de primer orden cuyas curvas solución sean las de la familia anterior. Justifica tu respuesta.

2.- (2 puntos) Sea $y' = f(x, y)$ una E.D.O. tal que $\nabla f(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.Demuestra que las isoclinas de la E.D.O. son rectas que pasa por el origen si y solo si la función f es homogénea (e.d. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$).

3.- (2 puntos) Se considera la E.D.O.

$$x''(t) - 2rx'(t) + r^2x(t) = \cos 3t.$$

¿Para que valores de $r \in \mathbb{R}$ todas las soluciones de la ecuación son curvas acotadas en $\mathbb{R}^2$? Justifica tu respuesta.

4.- (2 puntos) Representa el diagrama de fases del sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3y - 21 \\ y'(t) &= 3x + 6 \end{aligned}$$

5.-(2 punto) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2t + x(t)t^2} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

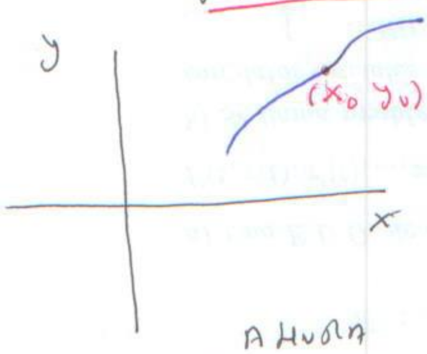
EXAMEN JULIO 2022.

PROBLEMA 1:] SEA $F(x,y): x^4y + y^3x^2 + x + 2y = k$

$k \in \mathbb{R}$.

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ES UNA FUNCIÓN CON DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN TODO $\mathbb{R}$..

PARA TODO $(x_0\ y_0) \in \mathbb{R}^2$, PARA EL VALOR DE $k = F(x_0, y_0)$



SE TIENE QUE EL PUNTO $(x_0 y_0)$ PERTENECE A LA CURVA $F(x,y) = F(x_0, y_0)$.

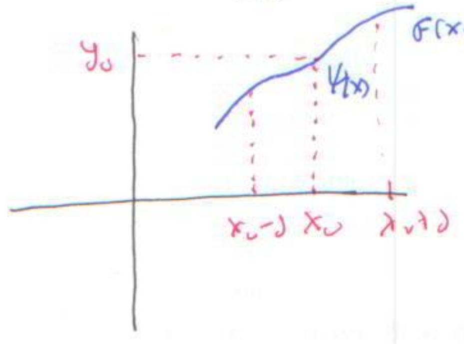
AHORA $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3y + 2y^3x + 1$

y $\frac{\partial F}{\partial y} = x^4 + 3y^2x^2 + 2 > 0$

POR ELLO AL APLICAR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA Y EXISTE $\varphi \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$

$\varphi\ [x_0-\delta, x_0+\delta] \longrightarrow \mathbb{R}$

TAL QUE $F(x, \varphi(x)) = F(x_0\ y_0) \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$



ADEMÁS φ ES ÚNICA Y.

DERIVANDO $F(x, \varphi(x)) = F(x_0\ y_0)$ RESPECTO DE x

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

DESPEJANDO $\varphi'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ $\Longleftrightarrow$

$\varphi(x_0) = y_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = \dfrac{-4x^3\varphi(x) - 2\varphi^3(x)x - 1}{x^4 + 3\varphi(x)^2x^2 + 2} \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

EDO DE 1º ORDEN CUYAS CURVAS SOLUCIÓN SON LAS CURVAS DE LA FAMILIA $F(x,y) = k$ $k \in \mathbb{R}$.

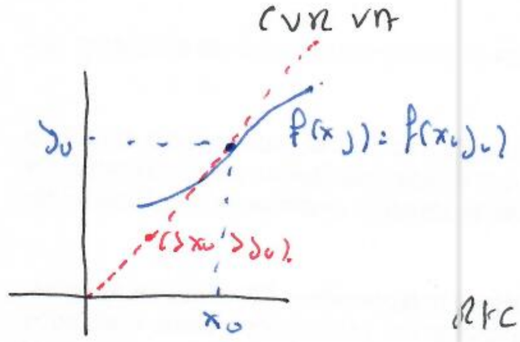
EXAMEN JULIO 2022

PROBLEMA 2: $y' = f(x,y)$.

$\Rightarrow$) SI f ES HOMOGÉNEA (e.d. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ PARA $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Y PARA TODO $\lambda \in \mathbb{R}$).

LA ISOCLINA $k = f(x,y)$ ES UNA CURVA DEL PLANO Y SI (x_0, y_0) PERTENECE A DICHA CURVA

$$k = f(x_0, y_0) = f(x,y) \underset{f \text{ HOMOGÉNEA}}{=} f(\lambda x_0, \lambda y_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



LUEGO TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA QUE PASA POR $(0,0)$ Y (x_0, y_0) SON PARTE DE LA ISOCLINA. COMO $\nabla f \neq 0$ EN TODO PUNTO, EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA NOS DICE (POR SU UNICIDAD) QUE $k = f(x,y)$ ES LA RECTA ANTERIOR.

$\Leftarrow$) SI LAS ISOCLINAS SON RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN

ENTONCES $k = f(x,y) \iff k - f(x,y) = \underbrace{ax + by = 0}_{\text{RECTA POR EL ORIGEN}}$

PARA CIERTOS $a, b \in \mathbb{R}$.

LUEGO PARA TODO $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 = a\lambda x + b\lambda y = k - f(\lambda x, \lambda y) \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = k$$

ASÍ $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. f ES HOMOGÉNEA.

EXAMEN JULIO 2022

PROBLEMA 3: $x''(t) - 2r x'(t) + r^2 x(t) = \cos 3t.$

E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$x'' - 2r x' + r^2 = 0$$

EC CARACTERÍSTICA $\lambda^2 - 2r + r^2 = (\lambda - r)^2 = 0$

$\lambda = r$ ES UNA RAÍZ DOBLE LUEGO

$$x(t) = k_1 e^{rt} + k_2 t e^{rt}$$ SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN PARTICULAR

$f(t) = \cos 3t$, COMO $3i$ NO ES RAÍZ DE LA EC. CARACTERÍSTICA, PODEMOS ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$x_p(t) = A \cos 3t + B \operatorname{sen} 3t$$ PARA CIERTOS A y $B \in \mathbb{R}$

LUEGO

$$\boxed{x(t) = k_1 e^{rt} + k_2 t e^{rt} + A \cos 3t + B \operatorname{sen} 3t \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

ALGUNAS DE ESTAS SOLUCIONES PUEDEN ESTAR ACOTADA (DE HECHO SOLO UNA SI $k_1 = k_2 = 0$), PERO NO TODAS. ASÍ $e^{rt} + A\cos 3t + B \operatorname{sen} 3t$ NO ESTÁ ACOTADA.

LUEGO NO EXISTE $r \in \mathbb{R}$ DE MODO QUE TODAS LAS SOLUCIONES DE LA EDO ESTÉN ACOTADAS.

EXAMEN JULIO 2022

PROBLEMA 5:

$$x'(t) = 3y - 21$$
$$y'(t) = 3x + 6$$

SOLUCIÓN ESTACIONARIA:

$$0 = 3y - 21$$
$$0 = 3x + 6$$

ASÍ $(x_0, y_0) = (-2, 7)$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA Y UN PUNTO DE EQUILIBRIO.

LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA, SON LAS DEL SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

$$x'(t) = 3y$$
$$y'(t) = 3x$$

DESPLAZADAS POR EL VECTOR $(-2, 7)$.

SISTEMA HOMOGÉNEO: $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x \end{cases}$

AUTOVALORES DE $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ o } \lambda = -3.$$

AUTOVECTORES PARA $\lambda = 3$

$-3x + 3y = 0$ $\quad v_1 = (1,1)$ AUTOVECTOR.

PARA $\lambda = -3$

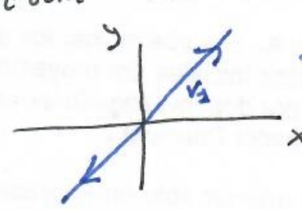
$3x + 3y = 0$ $\quad v_2 = (-1,1)$ AUTOVECTOR.

LUEGO $\boxed{(x(t), y(t)) = k_1 e^{3t}(1,1) + k_2 e^{-3t}(-1,1)}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-3t} \\ e^{3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$$

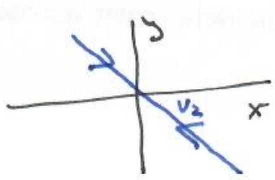
ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA HOMOGÉNEO Y

PARA $k_2 = 0$ TENEMOS



TRAYECTORIAS RECTAS

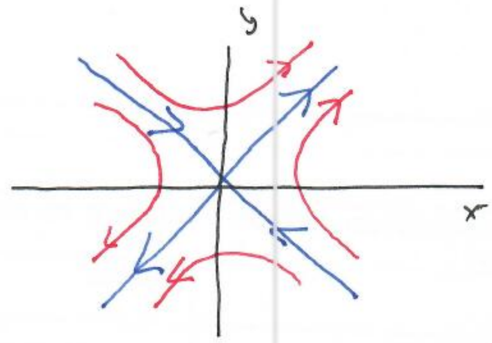
PARA $k_1 = 0$ TENEMOS



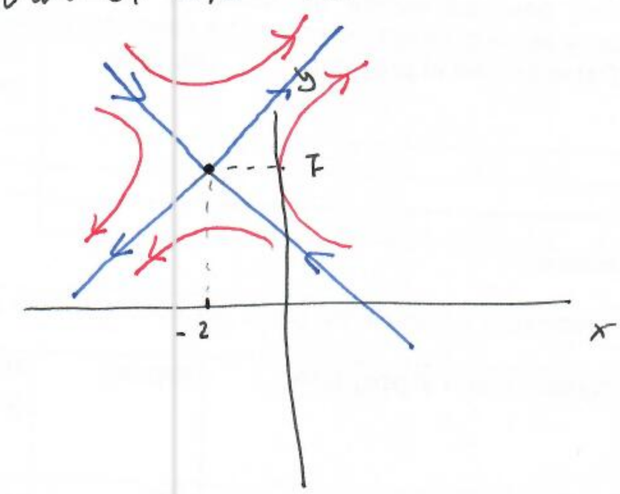
TRAYECTORIAS RECTAS

PARA $(x(t), y(t)) = k_1 e^{3t}(1,1) + k_2 e^{-3t}(-1,1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty \text{ CON ASÍNTOTA DIRECCIÓN } v_1 \\ \xrightarrow[t \to -\infty]{} \infty \text{ CON ASÍNTOTA DIRECCIÓN } v_2 \end{array} \right.$

$k_1 \neq 0$
$k_2 \neq 0$



LUEGO EL DIAGRAMA DE FASES DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO ES



LA SOLUCIÓN ESTACIONARIA $(-2,7)$ ES UN PUNTO DE SILLA.

EXAMEN JULIO 2022

PROBLEMA 5:
$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{2t + x\,t^2} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

INVIRTIENDO $\dfrac{1}{x'(t)} = 2t + x\,t^2$

POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA TENEMOS QUE
$$\begin{cases} t'(x) = 2t(x) + x\,t^2(x) \\ t(0) = 1 \end{cases}$$
ECU. DE BERNOULLI

EL CAMBIO DE VARIABLE $z(x) = \dfrac{1}{t(x)}$ DA

$$\boxed{z'(x) = \frac{-t'(x)}{t^2(x)} = \frac{-2t(x) - x\,t^2(x)}{t^2(x)} =}$$

$$= -2\frac{1}{t(x)} - x = \boxed{-2z(x) - x}$$ ECU LINEAL

$z(0) = 1$

LA RESOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA $z'(x) = -2z(x) \Rightarrow \boxed{z(x) = k e^{-2x} \quad k \in \mathbb{R}}$

NO HOMOGÉNEA COMO $f(x) = -x$ ES UN POLINOMIO INTENTAMOS ENCONTRAR EN LA ECU

$z_0(x) = Ax + B$

$z_0'(x) = A$

$A = -2(Ax + B) - x \Rightarrow -(2A+1)x - 2B - A = 0$

LUEGO $\begin{cases} 2A + 1 = 0 \\ -2B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -1/2$, $B = 1/4$

ASÍ $z(x) = -1/2\,x + 1/4 + k e^{-2x} \quad k \in \mathbb{R}$ ES LA SOLUCIÓN GENERAL

COMO $z(0) = 1$: $\dfrac{1}{4} + k e^{-0} = 1 \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$

ASÍ $z(x) = -1/2\,x + 1/4 + \dfrac{3}{4} e^{-2x}$ Y POR TANTO

$$t(x) = \frac{1}{-1/2\,x + 1/4 + \frac{3}{4} e^{-2x}}$$

ES LA SOLUCIÓN BUSCADA