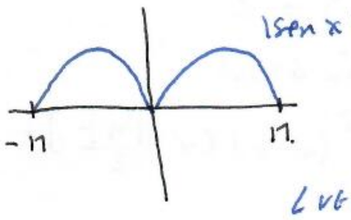
AM PRÁCTICA-2

Nombre y apellidos..

1.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, para $x \in [-\pi, \pi]$.
Indicación: Dibuja la gráfica de f.



Como $|\operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} -x| = |-\operatorname{sen} x|$. Se ve que f es par.

Luego los coeficientes b_n de su serie de Fourier son nulos $\boxed{b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx \underset{f \text{ par}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left(-\cos x \Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\operatorname{sen} x| \cos nx}_{\text{par}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx \underset{\text{por partes}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} nx}{n}}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{sen} nx\, dx\right] \underset{\text{partes}}{=}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cos x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx\right]$$ despejando

$$\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos nx\, dx = 2\frac{\cos x \cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)(-1)^n - 1\right]$$

Así $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{-4}{(n^2-1)\pi} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

1₂.- Comprueba que $\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$
Indicación: ¿Coincide f con su serie de Fourier? ¿Que pasa en $x = 0$?

La serie de Fourier de f es $\frac{2}{\pi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{((2k)^2-1)\pi} \cos 2kx$

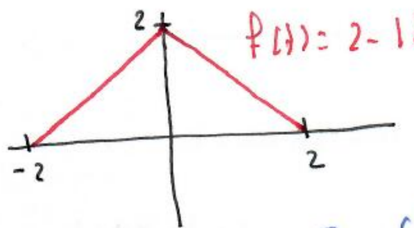
Como f es continua y existen $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$ para todo x, se sigue de los teoremas de convergencia

que $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k^2-1)\pi} \cos 2kx \ \forall x \in [-\pi, \pi]$ en

particular para $x = 0$: $0 = f(0) = \cancel{\frac{2}{\pi}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)(2k-1)\cancel{\pi}}$

despejando $\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$.

2.- Calcula la serie de Fourier de la función $f(t) = 2 - |t|$ en el intervalo $[-2, 2]$.



$f(t) = 2 - |t|$

FUNCIÓN 4-PERIÓDICA.

ES UNA FUNCIÓN PAR, POR TANTO LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE b_n SON NULOS $\boxed{b_n = 0 \quad \forall n}$

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{4 \times 2}{2}\right)}_{\text{ÁREA DEL TRIÁNGULO}} = 2$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{2 - |t|}_{\text{PAR}} \cos\frac{2\pi n t}{4}\,dt = \int_0^2 (2-t)\cos\frac{\pi n t}{2}\,dt$$

$$= \underbrace{2\int_0^2 \cos\frac{\pi n t}{2}\,dt}_{\text{NULA}} - \int_0^2 t\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt \underset{\text{POR PARTES}}{=}$$

$$-\left[\frac{2}{n\pi}t\,\cancel{\text{sen}\frac{n\pi t}{2}}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \text{sen}\,\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{-4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$$

LA SERIE DE FOURIER ES $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)t =$

2_1.- Utiliza lo anterior para calcular la suma de $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)t$$

AHORA COMO f ES CONTINUA Y EXISTEN $f'(t^-)$ y $f'(t^+)$ EN TODO $t \in [-2, 2]$, SE SIGUE QUE

$$f(t) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)x$$

EN PARTICULAR PARA $t = 0$

$$2 = f(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}$$

DESPEJANDO

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}}$$