AM PRÁCTICA-3

Nombre y apellidos...

1.- Calcula la transformada de Fourier de $f(t) = \begin{cases} te^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{\substack{=0 \\ \text{si } t<0}} e^{-i\lambda t}\,dt = \int_0^{\infty} t e^{-2t} e^{-i\lambda t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} t\, e^{-(2+i\lambda)t}\,dt \underset{\text{PARTES}}{=} \cancel{\left. \frac{t\, e^{-(2+i\lambda)t}}{-(2+i\lambda)} \right|_0^{\infty}} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-(2+i\lambda)t}}{2+i\lambda}\,dt =$$

$t=0$ y $\lim_{t\to\infty} te^{-2t}e^{-i\lambda t} = 0$.

$$= -\left. \frac{e^{-(2+i\lambda)t}}{(2+i\lambda)^2} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{(2+i\lambda)^2} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-2t}e^{-i\lambda t}}{(2+i\lambda)^2}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{(2+i\lambda)^2}$$

2.- Si la transformada de Fourier de una función f es $\widehat{f}(\lambda) = i\frac{\operatorname{sen}(\lambda^2-1)}{\lambda^2-1}$ ¿se puede afirmar que la función f es par? Justifica tu repuesta.

SI f FUESE PAR $\quad \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx =$

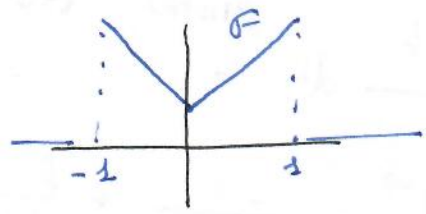
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\lambda x \, dx + \underbrace{i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}\lambda x}_{\text{IMPAR}} \, dx}_{\text{SE ANULA}} \in \mathbb{R}.$$

EN NUESTRO CASO NO ES POSIBLE QUE SEA PAR

3.- La transformada de Fourier de una señal f es $F(w) = \begin{cases} 1-w & \text{si} \quad w \in [-1,0] \\ 1+w & \text{si} \quad w \in (0,1] \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

Calcula f.

$\hat{f} = F$



COMO EXISTE $\hat{f}$, SUPONEMOS QUE f ES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE. POR OTRO LADO F TAMBIÉN LO ES $\int_{-1}^{1} F(w)\,dw < \infty$ Y PODEMOS APLICAR EL TEOREMA DE INVERSIÓN Y ASÍ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwx}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cos wx\, dw + \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(w)\operatorname{sen} wx}_{\text{IMPAR, POR SER F PAR}}\, dw}_{\text{SE ANULA}}\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \underbrace{F(w)\cos wx}_{\text{PAR}}\, dw = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1+w)\cos wx\, dw =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos wx\, dw + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^1 w\cos wx\, dw}_{\text{PARTES}} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\operatorname{sen} wx}{x}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi} w\frac{\operatorname{sen} wx}{x}\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} wx}{x}\, dw = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\cos wx}{x^2}\Big|_0^1\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{\pi}\frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{\pi x^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{2\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\Big].$$