PROBLEMA 8:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Si $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B$ con $f(x) = y$

Si $x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)$
Si $x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)$ $\Big\} \Rightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Luego $\boxed{f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)}$

Veamos la inclusión recíproca.

Si $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ ó $y \in f(B)$

Luego $\exists a \in A$ con $f(a) = y$ ó bien $\exists b \in B$ con $f(b) = f(y)$

Así a ó $b \in A \cup B$ luego $y = f(a)$ ó $y = f(b) \in f(A \cup B)$

Llegamos a que $\boxed{f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)}$

Demostradas las dos desigualdades se tiene la igualdad

b) Sea $A = [-1, 0]$ sea $B = [0, 1]$ sea

$f\ [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = x^2$

$f(A) = [0, 1]$ $f(B) = [0, 1]$, $A \cap B = \{0\}$.

Así $\boxed{f(A \cap B) = \{0\} \neq f(A) \cap f(B) = [0, 1]}$

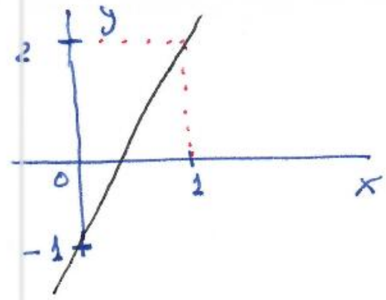
c) El ejemplo anterior sirve para ver que $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$

d) y e) son ciertas (se prueba como a)).

f) es cierto: si $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A$ y $f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ y $x \notin f^{-1}(B)$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Comprueba que b) y c) son ciertas si f es inyectiva

PROBLEMA 9:



a) Consideramos la recta que pasa por $(0,-1)$ y $(1,2)$.

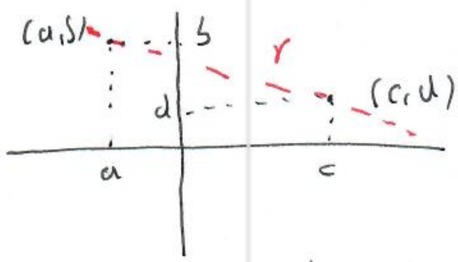
Es decir $y = ax + b$ con

$-1 = a0 + b \Rightarrow b = -1$

$2 = a\times 1 + b \Rightarrow a = 3$

La función $y = 3x - 1 = f(x)$ verifica lo pedido.

b)



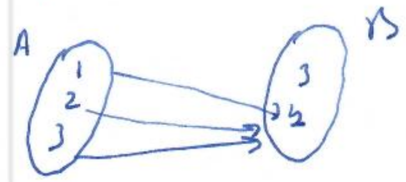
Pendiente de r

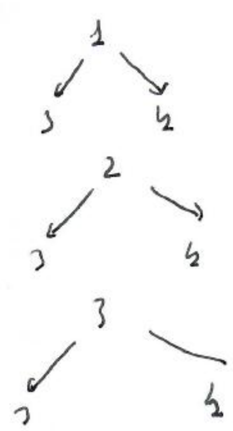
$$\frac{b-d}{a-c}$$

Luego la recta $y = \frac{b-d}{a-c}(x-c) + d = f(x)$ es la ecuación de la recta que pasa por (a,b) y (c,d), claro $f(a) = \frac{b-d}{\cancel{a-c}}\cancel{(a-c)} + d = b$

$f(c) = 0 + d = d.$

PROBLEMA 10:





Luego $2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$, aplicaciones con dominio $\{1,2,3\}$ y rango $\{3,4\}$.

Observemos que $2^3 =$

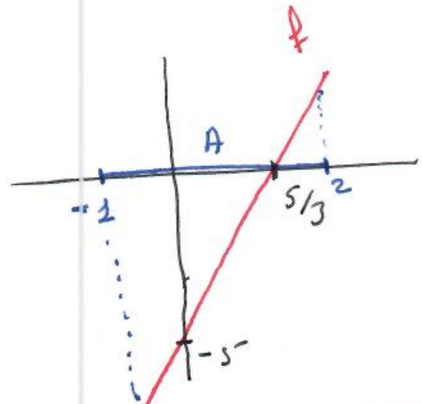
$= \text{Card } B^{\text{Card } A}$

PROBLEMA 11:

a) $f(x) = 3x - 5$ recta

f es creciente, inyectiva.

Así



$$\boxed{f(A) = [f(-1), f(2)] = [-8, 1]}$$

f creciente y continua

PROBEMOS LA IGUALDAD

Si $x \in A = [-1, 2]$, $\overset{\iff}{\text{def}}$ $-1 \le x \le 2$

Por otro lado $f(x) = 3x - 5$, luego

$f(-1) = -8 = 3\cdot(-1) - 5 \le 3x - 5 \le 3\cdot 2 - 5 = 1 = f(2)$

Así $f(x) \in [f(-1), f(2)]$, luego $f(A) \subseteq [f(-1), f(2)]$

Si $y \in [f(-1), f(2)]$, entonces:

$$-8 \le y \le 1$$

escribiendo $-8 \le 3x - 5 \le 1$ dividiendo por 3

$\iff -3 \le 3x \le 6$

$\iff -1 \le x \le 2$, luego $y \in f(A)$.

PROBLEMA 12: MIRA EL PROBLEMA 9:

PROBLEMA 13:)

a) Si f es inyectiva sea $g: B \to A$ tal que $g(y) = x$ con $f(x) = y$ si $y \in \operatorname{Im} f \subseteq B$; (x es único ya que f es inyectiva)

Luego $g \circ f(x) = x$.

Si $g \circ f = I_A$, sean x_1 y $x_2 \in A$, con $f(x_1) = f(x_2)$ así $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva

b) De modo similar a a)

Si $f(A) = B$, para $b \in B$ sea $a \in f^{-1}(\{b\})$ con $f(a) = b$, sea $g: B \to A$, $b \to g(a)$

Luego $f \circ g(b) = b \quad \forall b \in B$.

Por otro lado si $f \circ g|_B = I_B$, sea $b \in B$ entonces $g(b) \in A$ y $f \circ g(b) = b$, así f es sobreyectiva

c) Combina a) y b).

PROBLEMA 14:) $A = \bigcup_{x \in A} \pi(x)$ donde la unión es disjunta, en el sentido de que si $x \sim y \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$ y si $x \not\sim y$ entonces $\pi(x) \cap \pi(y) = \emptyset$ y π es una aplicación bien definida sobre todo A

como $x \sim x$, así $x \in \pi(x)$

y además $\forall B \in A/\sim$, si $x \in B$, entonces

$$\pi(x) = B.$$

Luego π es sobreyectiva

PROBLEMA 15:

a) $Y \subseteq X$; X finito

Si Y fuese infinito, existiría $y_0 \subsetneq Y$ y una aplicación $f\ y_0 \longrightarrow Y$ biyección.

Sea $y_0 \cup (X \setminus Y) \subsetneq X$ y sea

$$\tilde{f} \quad y_0 \cup (X \setminus Y) \longrightarrow X$$

$$x \longrightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus Y \\ f(x) & \text{si } x \in y_0 \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{f}$ es una biyección y tendríamos X infinito, ¡contradicción!

b) Análogo a a)

c) Si $f\ X \longrightarrow Y$ es una biyección, y existe $x_0 \subsetneq X$ y $g\ x_0 \longrightarrow X$ biyección

entonces $f \circ g(x_0) \subsetneq Y$ y

$$\begin{tikzcd} f \circ g(x_0) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"'] & Y \\ g(x_0) \arrow[r, "g"] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

$$h : f \circ g \circ f^{-1}\ g(x_0) \longrightarrow Y \quad h \text{ composición}$$

es una biyección por ser composición de biyecciones!

PROBLEMA 16]

a) SEA $f\ A \to \mathbb{N}$ BIYECCIÓN

SEA $g\ B \to \mathbb{N}$ BIYECCIÓN

SEA $h_1\ \mathbb{N} \to \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ BIYECCIÓN

SEA $h_2\ \mathbb{N} \to \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$ BIYECCIÓN

SUPONGAMOS QUE $A \cap B = \emptyset$, ENTONCES

$$H\ A \cup B \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow H(x) = \begin{cases} h_1 \circ f(x) & \text{SI } x \in A \\ h_2 \circ g(x) & \text{SI } x \in B \end{cases}$$

H ES CLARAMENTE UNA BIYECCIÓN.

SI $A \cap B \neq \emptyset$, ENTONCES

$A \cup B = A \setminus B \cup (A \cap B) \cup B - A$ UNIÓN DISJUNTA

ASÍ COMO $A \subseteq A \cup B \Rightarrow \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} \mathbb{N} \leq \operatorname{Card}(A \cup B)$

POR OTRO LADO $A \cup B = A \cup (B - A)$, POR LO QUE

ARRIBA $\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card}(A \cup (B - A)) = \operatorname{Card} \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{N}\}$ SE PUEDE REPRESENTAR POR

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 1 & (11) & (12) & (13) & \cdots & (1, n) \\ 2 & (21) & (22) & (23) & \cdots & (2n) \\ 3 & (31) & (32) & (33) & & (3n) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & n(n) \\ n & (n1) & (n2) & & \cdots & \end{array}$$

SE REPRESENTA $f\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$n \to f(n) =$

COMO $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$, SI (p, q) SON TALES QUE $p + q = R$

ENTONCES HAY $R-1$ PARES QUE SUMAN R

SI $\frac{N(N+1)}{2} < n = \frac{N(N+1)}{2} + r \leq \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ $1 \leq r \leq N+1$ $f(n) = (r, N-r+2)$ ¡BIYECCIÓN! ¡PRUÉBALO!

PROBLEMA 17:]

EN 16:] HEMOS VISTO QUE $Card(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = Card\, \mathbb{N}$.

ASÍ $(1,1)\ (1,2)\ (1,k)\ (1,n)\ \dots$

$(2,k)$

$\vdots$

$(n,1)\ (n,2) \cdot (n,k)\ (n,n)\ \dots$

$\vdots$

ES CLARO QUE $\{(n,k) : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}_n$ TIENE CARDINAL NUMERABLE

$$Card(\mathbb{N}\times\mathbb{N})_n = Card\, \mathbb{N}$$

DE AQUÍ SE SIGUE QUE PARA $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, CON $Card\, A_n = Card\, \mathbb{N}$ PARA TODO n, SE TIENE QUE $Card \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = Card\, \mathbb{N}$.

LUEGO SI PARA CADA $n \in \mathbb{N}$ VEMOS QUE:

$Card\{A \subset X : Card\, A = n\}$ ES NUMERABLE,

EN TAL CASO $Card\, \mathcal{F} = Card\left(\bigcup_n \{A \subseteq X : Card\, X = n\}\right) =$

$= Card\, \mathbb{N}$

ES CLARO QUE $Card\{A \subset X : Card\, A = 1\} = Card\, A = Card\, \mathbb{N}$.

PROBEMOS POR INDUCCIÓN

SI $Card\{A \subset X : Card\, A = n\} = Card\, \mathbb{N}$

SI $X := \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, EN TAL CASO

$$\mathcal{F}_{n+1} = \{B \subset X : Card\, A = n+1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A \cup \{a_i\} : \underbrace{A \subseteq X : Card\, A = n}_{\text{NUMERABLE}}\}$$

LA UNIÓN NUMERABLE DE CONJUNTOS NUMERABLES ES NUMERABLE POR LO DE ARRIBA

YA ES CLARO QUE $\mathcal{F}$ ES UNIÓN NUMERABLE DE LOS $\mathcal{F}_n$, QUE SON NUMERABLES.