CONJUNTOS Y APLICACIONES

PROBLEMA 1:

SI $a \in A$, COMO $A \subset B$ SE TIENE QUE:

$a \in B$; COMO $B \subset C \Rightarrow a \in C$.

LUEGO $A \subset C$.

PROBLEMA 2:

$A \cap A = A$ EVIDENTE

$A \cup A = A$ "

$A \cap B = B \cap A$ "

$A \cup B = B \cup A$ "

ASOCIATIVA $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

SEA $x \in (A \cap B) \cap C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ y \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A$ y $x \in B$ y $x \in C$

LUEGO $x \in A$ y $x \in B \cap C$, ASÍ $x \in A \cap (B \cap C)$

TENEMOS QUE $\boxed{(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)}$

LA OTRA INCLUSIÓN ES IGUAL

ASOCIATIVA $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ COMO LA ANTERIOR

DISTRIBUTIVA $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

SI $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ y \\ x \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow x \in B$ ó $x \in C$ LUEGO

$x \in A \cap B$ ó $x \in A \cap C$, ASÍ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

POR TANTO $\boxed{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

SI $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow y \in A \cap B$ ó $y \in A \cap C$.

LUEGO $y \in A$ y $y \in B$ ó $y \in A$ y $y \in C$ ASÍ

$y \in A$ y $y \in B \cup C$, LUEGO $y \in A \cap (B \cup C)$

POR TANTO $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)}$

LAS DOS INCLUSIONES ANTERIORES IMPLICAN LA IGUALDAD

DISTRIBUTIVA $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

COMO LA ANTERIOR

PRUEBA 3: LEYES DE MORGAN

SI A ES UN CONJUNTO Y $B, C \subseteq A$, ENTONCES

- $B \cup B^c = A$ $\quad (B^c \underset{\text{DEF}}{=} \{x \in A : x \notin B\})$

SI $x \in B \cup B^c$ COMO $B \subseteq A$ Y $B^c \subseteq A \Rightarrow x \in A$

LUEGO $B \cup B^c \subseteq A$

SI $x \in A$ O BIEN $x \in B$ Ó BIEN $x \notin B \Leftrightarrow$

O BIEN $x \in B$ O BIEN $x \in B^c \Leftrightarrow$

$x \in B \cup B^c$

ASÍ $A \subseteq B \cup B^c$.

- $B \cap B^c = \emptyset$ OBVIO

- $(B \cup C)^c = B^c \cap C^c$

SI $x \in (B \cup C)^c \Rightarrow x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \notin B$ Y $x \notin C$

LUEGO $x \in B^c$ Y $x \in C^c \Rightarrow x \in B^c \cap C^c$

ASÍ $\boxed{(B \cup C)^c \subseteq B^c \cap C^c}$

VEAMOS LA OTRA INCLUSIÓN

SI $x \in B^c \cap C^c \Rightarrow x \in B^c$ Y $x \in C^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin B$ Y $x \notin C \Rightarrow x \notin B \cup C$

ASÍ $x \in (B \cup C)^c$

LUEGO $\boxed{B^c \cap C^c \subseteq (B \cup C)^c}$

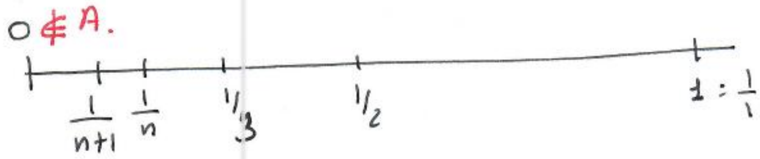
AMBAS INCLUSIONES NOS DAN LA IGUALDAD

- $(B \cap C)^c = B^c \cup C^c$

ANÁLOGA A LA ANTERIOR

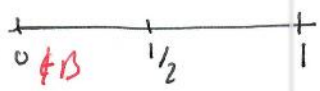
Problema 4:

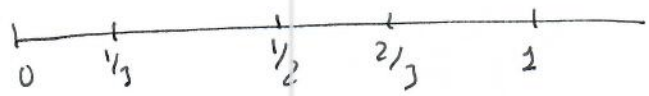
$A = \{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \}$

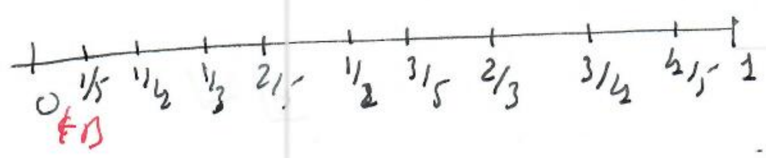


$B = \{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} : p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q$, p y q son números coprimos y $q \leq 7 \} =$

$= \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7} \}$



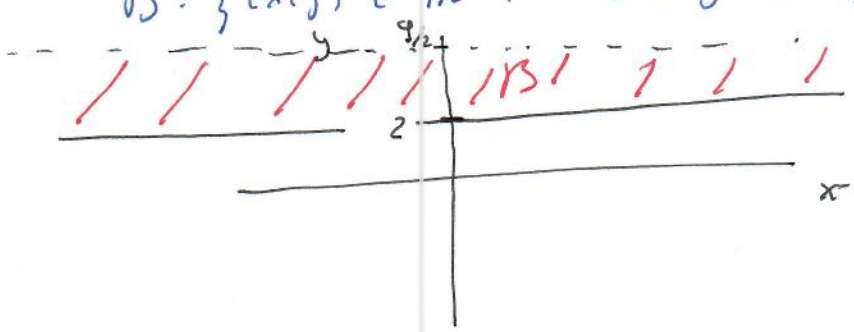




...etc.

Problema 5:

$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y < 9/2 \}$



PROBLEMA 6:

$x \in \mathbb{R}$

$$x \overset{(1)}{=} x(x-1) \overset{(2)}{=} x - x \Rightarrow -x = 0$$

Claramente $x = x(x-1)$ no es cierta salvo que $x = 0$.

Si $x \neq 0$ $x = x(x-1) \Rightarrow 1 = x - 1 \Rightarrow x = 2$

Por otro lado tampoco es cierto en general que $x(x-1) = x - x$.

Si $x = 0$ es cierta,

Si $x \neq 0$ $x(x-1) = x - x \Leftrightarrow x - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Así, lo que afirma solo es cierto si $x = 0$.

Si $x = 2$ (1) es cierta pero (2) no
Si $x = 1$ (2) es cierta pero (1) no
Si $x \neq 1$ ó 2 (1) y (2) no son ciertas
} en todo caso asistiendo a la conclusión $x = 0$.

PROBLEMA 7: La simplificación

$$(x+y)(x-y) = y(x-y) \underset{\substack{\text{dividiendo por} \\ (x-y)}}{\Rightarrow} x + y = y$$

no es correcta ya que $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.