CONJUNTOS Y APLICACIONES.

1.- Sean A, B y C tres conjuntos. Prueba que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

2.- Prueba todas las propiedades de la unión y de la intersección de conjuntos enunciadas en teoría.

3.- Prueba las leyes de Morgan: las propiedades de la complementación de conjuntos enunciadas en teoría.

4.- Dibuja sobre la recta real los siguientes conjuntos:
a) $A = \{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \ : \ n \in \mathbb{N} \}$.

b) $B = \{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \ : \ p, q \in \mathbb{N}, \ p \leq q, \ p$ y q sin divisores comunes y $q \leq 7 \}$.

5.- Dibuja sobre el plano los siguientes conjuntos:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0 \}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq y < 9/2 \}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + 1 < y \leq 3x \}$.

6.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **no** es cierta?

a) $x(y + z) = xy + xz$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$, $x = x(x - 1) = x - x$, y por tanto $-x = 0$.

c) $xy(z + y) = y(xz + xy)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

d) $\dfrac{x + z}{y} \geq \dfrac{x + r}{y}$, por tanto $z \leq r$, para todo $x, y, z, r \in (-\infty, 0)$.

7.- Determina el error del siguiente razonamiento:
Supongamos que $x = y$, entonces $x^2 = xy$ y por tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$; de donde $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ y simplificando $x + y = y$. Como $x = y$, tenemos que $2y = y$ y de nuevo simplificando $2 = 1$.

8.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación y sean $A, B, C, B \subseteq \mathbb{R}$. Estudia cuáles de las siguientes igualdades son ciertas en general. Justifica mediante una demostración o un contraejemplo cada una de las respuestas:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ **b)** $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ **c)** $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

d) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ **e)** $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

f) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

9.- a) Consatruye una función cuyo dominio sea $[0, 1]$ y cuyo recorrido sea $[-1, 2]$.

b) Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos del plano. Escribe la fórmula de la función cuya gráfica es la recta que pasa por estos dos puntos.

10.- ¿Cuantas funciones se pueden definir con dominio $\{1, 2, 3\}$ y recorrido $\{3, 4\}$?

11.- Calcula $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ en los siguientes casos, donde f es siempre una función real de variable real:

a) $f(x) = 3x - 5$, $A = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 2 \}$ y $B = \{ y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \}$

b) $f(x) = -x^2$, $A = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \leq x \leq 3 \}$ y $B = \{ y \in \mathbb{R} \ : \ -4 < y < 1 \}$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $A = \{ x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{2k-1}{2}\pi \leq x \leq k\pi \}$ y $B = \{ y \in \mathbb{R} \ : \ -1/2 < y < 1/2 \}$.

12.- Establece una biyección entre los intervalos $[0,1]$ y $[0,5]$. Establece una biyección entre dos intervalos cerrados de la recta real $[a,b]$ y $[c,d]$.

13.- Sea $f : A \to B$ una aplicación.

a) Prueba que f es inyectiva si solo si existe otra aplicación $g : B \to A$ de manera que $g \circ f = I_A$.

b) Prueba que f es suprayectiva si y solo si existe otra aplicación $g : B \to A$ de manera que $f \circ g = I_B$.

c) Prueba que f es biyectiva si y solo si existe otra aplicación $g : B \to A$ de manera que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$.

14.- Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Sea A/R es conjunto cociente asociado. Se define

$$\begin{array}{rcccll} \pi & : & A & \to & A/R & \\ & & x & \to & \pi(x) & = \ A_x \end{array}$$

donde A_x es la clase asociada a x respecto de la relación R. Prueba que π (llamada *Proyección Canónica*) es una aplicación y además es suprayectiva.

15.- prueba las siguiente afirmaciones:

a Si X es un conjunto finito y $Y \subseteq X$, entonces Y es finito.

b Si X es un conjunto finito y $Y \sim X$, entonces Y es finito.

c Si X es un conjunto infinito y $Y \sim X$, entonces Y es infinito.

16.- Sea dos conjuntos A y B de manera que $CardA = CardB = Card\mathbb{N}$, prueba que

a $Card(A \cup B) = Card\mathbb{N}$.

b $Card(A \times B) = Card\mathbb{N}$.

17.- Dada un conjunto X numerable (e.d. $CardX = Card\mathbb{N}$), se considera el conjunto de sus subconjuntos finitos

$$F = \{ A \subset X \ : \ A \text{ finito} \}.$$

Prueba que F también es numerable.