TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PARA HACER ESTOS PROBLEMAS HAY QUE TOMAR DE LA TEORÍA DE LOS APUNTES:

- TOPOLOGÍA DE LA RECTA
- CARACTERIZACIÓN DE COMPACTOS POR SUCESIONES

ADEMÁS DE LA TEORÍA SOBRE EL CUERPO $\mathbb{R}$, LOS TEMAS DE SUCESIONES Y LA DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA.

PROBLEMA 1:

a) $A = \{x < 0 : \frac{x+7}{3} < 3\} = \{x < 0 : x < 9-7\} =$

$= (-\infty, 0)$ SEMIRRECTA ABIERTA

LUEGO $\mathring{A} = (-\infty, 0)$ ES UN ABIERTO

$\bar{A} = (-\infty, 0]$ A NO ES CERRADO

ESTÁ CLARO $(-\infty, 0) \subseteq \bar{A}$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $(0-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

LUEGO $0 \in \bar{A}$.

SI $a > 0$, ENTONCES $(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}) \cap A = \emptyset$

$0 \quad a/2 \quad a \quad 3a/2$

LUEGO $a \notin \bar{A}$.

b) $A = \{ \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \} = \{1/2, 2/3, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\}$

$\mathring{A} = \emptyset$ YA QUE $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a-\delta, a+\delta)$ TIENE TANTOS ELEMENTOS COMO $\mathbb{R}$, SI Card $A = \mathbb{N}$, LUEGO $(a-\delta, a+\delta) \not\subseteq A$. NO ES ABIERTO

$\bar{A} = A \cup \{1\}$ COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$1/2 \quad 2/3 \quad 1$

PARECE CLARO QUE 1 ES ADHERENTE A "A"

NO ES CERRADO

c) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}\} = (1, 1/2) \cup (1/2, 1/3) \cup \ldots \cup (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \cup \ldots$

$\mathring{A} = A$ ABIERTO (LA UNIÓN DE ABIERTOS LO ES)

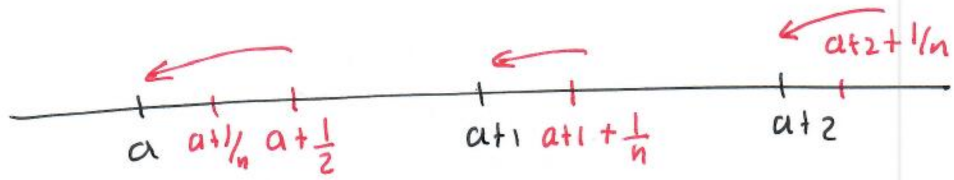
$\bar{A} : [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$ O BIEN $x \in A$ Ó BIEN $x = 0, 1$ Ó $\frac{n}{n+1}$ ADHERENTES

SI $x \notin [0,1]$ $[\quad]_1 \; (x)$ x NO ES ADHERENTE.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 2:) SEA $a < a+1 < a+2$

SEA $A = \{ a+j+\frac{1}{n} : j=0,1,2 \text{ y } n \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \}$



Los puntos $a+j+\frac{1}{n}$ son aislados; como $a = \lim_{n\to\infty} a+\frac{1}{n}$ $\quad a+1 = \lim_{n\to\infty} a+1+\frac{1}{n}$ y $a+2 = \lim_{n\to\infty} a+2+\frac{1}{n}$ se sigue que a, $a+1$ y $a+2$ son puntos de acumulación de A. No hay más.

PROBLEMA 3:) SEA $\alpha = \sup A$ con $\alpha \notin A$

$\forall \varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de A luego existe $a \in A$ con $\alpha - \varepsilon \leq a < \alpha$.

Así $a \in (\alpha+\varepsilon, \alpha-\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, luego $\alpha \in \bar{A}$, y como $\alpha \notin A$, α es un punto de acumulación.

Sea $\beta = \inf A$, dado $\varepsilon > 0$, $\beta+\varepsilon$ no es cota inferior ... etc.

PROBLEMA 4:) a) ¿ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$? Cierta

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A\cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A\cup B} \\ B \subseteq A\cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A\cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A}\cup\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$$

Si $x \in \overline{A\cup B} \Rightarrow \forall \frac{1}{n}, \exists x_n \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \cap (A\cup B)$, al menos una cantidad infinita de x_n está en A o en B, luego $x \in \bar{A}$ ó $x \in \bar{B}$, así $x \in \bar{A}\cup\bar{B}$

b) ¿ $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}$? $A\cap B \subset A$ y $A\cap B \subset B \Rightarrow \overline{A\cap B} \subset \bar{A}\cap\bar{B}$

La otra inclusión no se da. Ejemplo

Sea $A = (-1,0)$ y $B = (0,1)$ $\quad \overline{A\cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$

$\bar{A} = [-1,0]$ y $\bar{B} = [0,1]$ y $\bar{A}\cap\bar{B} = \{0\}$

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 5:] SEA F CERRADO CON

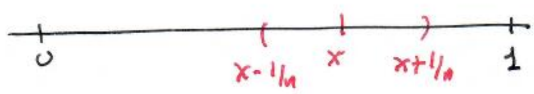
$$[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq F$$

PUES SER CERRADO $F = \overline{F}$.

SEA $x \in [0,1]$. SI $x \in \mathbb{Q} \subseteq F$

SI $x \notin \mathbb{Q}$, SEA $\frac{1}{n}$, entonces SIEMPRE PODEMOS ENCONTRAR $x_n \in \mathbb{Q}$

DADOS $r, s \in \mathbb{R}$ CON $r < s$ EXISTE $y \in \mathbb{Q}$ CON $r < y < s$.



CON $x - 1/n < x_n < x + 1/n$.

ASÍ $\forall \delta > 0$, EXISTE UN $k \in \mathbb{N}$ CON $1/k < \delta$

Y POR TANTO $(x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{Q} \supseteq [x - 1/k, x + 1/k] \cap \mathbb{Q} \ni x_k$

LUEGO x ES ADHERENTE A F, ASÍ $x \in \overline{F} = F$

LUEGO $[0,1] \subseteq F$.

PROBLEMA 6:] a) ¿ $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \max\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$?

SEA $a_n = \max\{x_1, x_2 - x_n\}$ CLARAMENTE $(a_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ES UNA SUCESIÓN CRECIENTE.

- SI (x_n) NO ESTÁ ACOTADA SUPERIORMENTE, $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$ (NO ESTÁ ACOTADA)

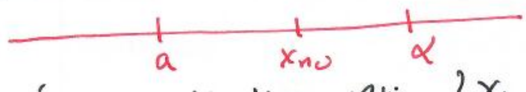
Y COMO a_n ES CRECIENTE Y NO ACOTADA $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- SI (x_n) ESTÁ ACOTADA Y $\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ENTONCES $a_n = \max\{x_1, x_2 \ldots x_n\} \leq \alpha \quad \forall n$

Y ASÍ $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \underset{\text{DEF}}{=} a \leq \alpha$.

SUPONGAMOS QUE $a < \alpha$, COMO a NO ES, EN ESTA



SUPOSICIÓN, SUPREMO DE $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, EXISTE UN x_{n_0} CON $a < x_{n_0} \leq \alpha$; ASÍ $a_{n} \geq x_{n_0} \; \forall n \geq n_0$, POR DEFINICIÓN DE a_n. LLEGARÍAMOS A QUE $a \geq a_n \geq x_{n_0}$ LLEGANDO A CONTRADICCIÓN. ASÍ SÓLO CABE QUE $a = \alpha$.

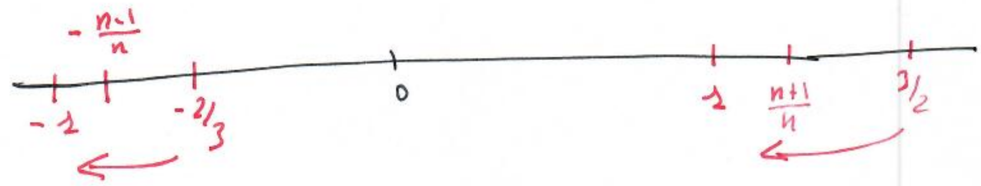
TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 7:

$A = (0,1) \cup \{2\}$

Parece claro que $\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$, los puntos de acumulación son todos los de $[0,1]$; 2 no puede ser al estar aislado.

$B = \{(-1)^n + 1/n \; : \; n \in \mathbb{N}\} = \{0, 3/2, -2/3, 5/4, \dots\}$



$\bar{B} = B \cup \{-1, 1\}$, los puntos de la forma $(-1)^n + 1/n$ son aislados, en cambio (-1) y (1) son puntos de acumulación

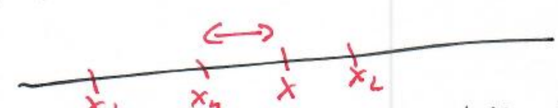
$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{2k} = 1 \\ \lim_{k\to\infty} -1 + \frac{1}{2k-1} = -1 \end{cases}$$

PROBLEMA 8:

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación si $\forall \delta > 0$ existe $a \in A \cap (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ $\iff$ $\forall \delta > 0$ $A \cap (x-\delta, x+\delta)$ tiene

$\Leftarrow$] Es clara, si $\forall \delta > 0$ $A \cap (x-\delta, x+\delta)$ tiene cardinal infinito, en particular $A \cap (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ no es vacío.

$\Rightarrow$] Supongamos que existe $r > 0$ tal que $A \cap (x-r, x+r) \setminus \{x\} = \{x_1, x_2 \dots x_N\}$ es un conjunto finito



Sea $\delta = \frac{1}{2}\min\{|x - x_l| : l = 1 \dots N\} > 0$, ya que $x \neq x_l$ $\forall l = 1 \dots N$.

Así $((x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ ya que

$\delta < |x - x_l| \leq r$, así $((x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}) \cap A \subseteq ((x-r, x+r) \setminus \{x\}) \cap A$

pero $x_1 \dots x_N$ no están, luego sólo nos queda el vacío. Así x no sería punto de acumulación (contradicción)

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 9: a) $A_{k+1} \subseteq A_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

LUEGO $\sup A_{k+1} = a_{k+1} \leq a_k = \sup A_k$.

LA SUCESIÓN (a_k) ES DECRECIENTE Y CLARAMENTE:

$$\inf \{x_n\} \leq a_k \quad \forall k.$$

PUES SER ACOTADA Y DECRECIENTE, EXISTE:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \underset{\text{DEF}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

DE FORMA ANÁLOGA, EXISTE: ((b_k) ES CRECIENTE)

$$\lim_{k\to\infty} b_k = b \underset{\text{DEF}}{=} \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

b) COMO $b_k = \inf A_k \leq \sup A_k = a_k$

AL TOMAR LÍMITES SE TIENE QUE

$$b \leq a$$

ES DECIR $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

c) SEA $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, ASÍ $\forall j \in \mathbb{N} \ \exists n_j$ TAL QUE

$$x_n \in \left(x - \frac{1}{j}, x + \frac{1}{j}\right) \quad \forall n \geq n_j$$

ASÍ QUIZÁS $A_k \subseteq (x - 1/j, x + 1/j) \ \forall k \in n_j$ Y

ASÍ

$$x - 1/j \leq b_k \leq a_k \leq x - 1/j \quad \forall k \geq n_j$$

$$\underset{x}{\downarrow}{\scriptstyle j\to\infty} \qquad \underset{x}{\downarrow} \qquad \underset{x}{\downarrow} \qquad \underset{x}{\downarrow}{\scriptstyle j\to\infty}$$

LA OTRA PARTE DE LA EQUIVALENCIA ES SIMILAR.

SI $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = b = a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, DADO $j \in \mathbb{N}$

EXISTE n_j TAL QUE $\forall k \geq n_j$

$$b_{n_j} \leq x_k \leq a_{n_j}$$

$$\underset{a}{\downarrow}{\scriptstyle j\to\infty} \qquad\qquad \underset{a}{\downarrow}{\scriptstyle j\to\infty}$$

PROBLEMA 9:

d) SI $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$

DADO $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ TAL QUE $\forall n \geq n_0$

$a \leq a_n$ (a_n ES DECRECIENTE, SEGÚN EL APARTADO a))

LUEGO $\exists x_{j_n} \in A_n$ CON

$a - \varepsilon < x_{j_n} \leq a_n$

LUEGO LA CANTIDAD DE $x_j > a - \varepsilon$ ES INFINITA.

POR LO CONTRARIO, SI M ES COTA SUPERIOR DE (x_n)

Y EXISTE $(x_{n_k}) \subseteq [a+\varepsilon, M]$,

ENTONCES $\sup A_{n_k} = a_{n_k} \geq a + \varepsilon$ Y

ASÍ $\lim_{k\to\infty} \underbrace{a_{n_k}}_{\text{SUBSUCESIÓN}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{\text{SUCESIÓN CONVERGENTE}} \geq a + \varepsilon$, LO

CUAL NO ES POSIBLE.

LA OTRA IMPLICACIÓN,

SI DADO $\varepsilon > 0$ $\exists x_{n_k} \geq a - \varepsilon$ $\forall k$, $\Rightarrow \sup_k A_{n_k} \geq a - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

ASÍ $(a_{n_k}) \geq a - \varepsilon$, $\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \geq a - \varepsilon$

LUEGO $\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \geq a.}$ (1)

SI DADO $\varepsilon > 0$ $\exists x_{n_{\varepsilon'}}$, $x_{n_{\varepsilon'}} \geq a + \varepsilon$ CANTIDAD FINITA

ENTONCES $\sup A_n \leq a + \varepsilon$, LUEGO $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq a + \varepsilon$
$\forall n \geq n_\varepsilon$

PARA TODO $\varepsilon > 0$; POR LO TANTO $\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq a.}$ (2)

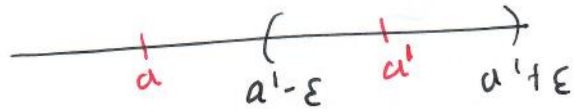
(1) Y (2) DAN LA IGUALDAD

e) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = b \iff \forall \varepsilon > 0$ $\{n : x_n < b - \varepsilon\}$ ES FINITO
Y $\{n : x_n > b - \varepsilon\}$ ES INFINITO

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 9: f) Sea $a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$. Es claro

de d) que a es un punto de acumulación para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si existe $a' > a$ punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$



Para $\varepsilon = \frac{|a-a'|}{2} > 0$, por ser a' punto de acumulación, existen infinitos x_n mayores que $a'-\varepsilon = a+\varepsilon$, lo cual contradice d). Luego $a' > a$ no puede existir.

g) Análogo a f)

PROBLEMA 10:

a) $(-1)^n \frac{n}{(1+n)^n} = (-1)^n \left(\frac{n}{1+n}\right) \cdot \frac{1}{(1+n)^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Los límites superior e inferior coinciden con el límite

b) $(1+\frac{1}{n})\cos n\pi = (1+\frac{1}{n})(-1)^n$

Así $\underline{\lim_{n\to\infty}}(1+\frac{1}{n})(-1)^n = -1$ y $\overline{\lim_{n\to\infty}}(1+\frac{1}{n}) = 1$

e) $3^{(-1)^n n} = \begin{cases} 3^n & n \text{ par} \\ \frac{1}{3^n} & n \text{ impar} \end{cases}$ No está acotada, no tiene límite superior

Así $\underline{\lim_{n\to\infty}}(3)^{(-1)^n n} = 0 < \overline{\lim_{n\to\infty}}(3)^{(-1)^n} = \infty$.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 11: $\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

$$a_k = \sup A_k = \sup \{ x_n + y_n : n \geq k \} \leq$$

$$\leq \sup \{ x_n : n \geq k \} + \sup \{ y_n : n \geq k \} =$$

$$= a'_k + a''_k$$

LUEGO $\lim_{k\to\infty} a_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} (x_n + y_n) \leq \lim_{k\to\infty} (a'_k + a''_k) =$

$$= \lim_{k\to\infty} a'_k + \lim_{k\to\infty} a''_k =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n .$$

EJEMPLO SEA $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

$y_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}$.

$x_n + y_n = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ | ASÍ $\lim x_n + y_n = 0 <$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 1$ | $< \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$

PROBLEMA 12: a) VEAMOS QUE $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

ES CLARO QUE $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$

LA PRUEBA DE QUE $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ ES

ANÁLOGA A LA QUE VAMOS A HACER

DEM SI $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, ES CLARO

SI $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, SEA $r > \alpha$, ASÍ $\exists n_0$ TAL

QUE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \underset{a_n>0}{\Leftrightarrow} a_{n+1} \leq r a_n \leq r^2 a_{n-1} \leq \cdots \leq r^{n+1-n_0} a_{n_0}$

ASÍ $a_{n+1} \leq r^{n+1} \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$

PROBLEMA 12: Como $a_{n+1} \leq r^{n+1} \dfrac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$ $\forall n \geq n_0$

se sigue que $\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq r \sqrt[n+1]{\dfrac{a_{n_0}}{r^{n_0}}}$

como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, $p>0$; dado $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \geq n_0$

tal que $\forall k \geq k_0$

$$\sqrt[k+1]{a_{k+1}} \leq r(1+\varepsilon) = r+\varepsilon$$

para todo $\varepsilon>0$ y para todo $r>\alpha$

para todo $\varepsilon>0$ y para todo $r > \alpha$ del problema 9

luego por el apartado c)

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{a_k} \leq \alpha.$$

b) Por el apartado a) si existe $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$,

se sigue que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

c) EJEMPLO Sea $a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1/n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & n \text{ par} \\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} & n \text{ impar} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Por otro lado si n es par

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

si n es impar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\frac{1}{n}} = n(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Luego no existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ y sin embargo

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$; es cierto que $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 1 \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$

PROBLEMA 12:

c) ESTUDIO $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^n} & n \text{ IMPAR} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ PAR.} \end{cases}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$$

POR OTRO LADO

SI n ES PAR $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^n \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

SI n ES IMPAR $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ASÍ $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < \frac{1}{2} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$

PENSANDO EN LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

EL CRITERIO DEL COCIENTE NO NOS AYUDA A DETERMINAR SI CONVERGE O NO

EL CRITERIO DE LA RAIZ $\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1 \right)$

NOS DICE QUE LA SERIE CONVERGE

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$; CALCULAMOS $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} ;$$ POR EL APARTADO b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = 1/4$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\, n^n}}$ USA EL ARGUMENTO ANTERIOR.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 13: Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, A infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

DEM Por ser A acotado $\exists M>0$ con $A \subseteq [-M, M]$
Por ser A infinito existe

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow A$$
$$n \longrightarrow f(n) = x_n \in A \quad , \; f \text{ inyectiva}$$

(MIRAR CARDINALIDAD EN LA TEORÍA)

Luego $(x_n) \subseteq [-M, M]$, es una sucesión acotada, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $x_{n_k} \longrightarrow x \in [-M, M]$.

Por último veamos que x es punto de acumulación para A.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0$ tal que si $k \geq k_0$, entonces
$x_{n_k} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Como x_{n_k} son distintos, podemos asegurar que $x_{n_k} \neq x$, luego $x_{n_k} \in A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}$.
Así x es punto de acumulación de A.

PROBLEMA 14: Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto

$K = \{x_1, x_2, \ldots \mid x_i \text{ aislado}\}$

Por ser compacto, está acotado y si K fuese infinito, por el ejercicio anterior existiría $(x_{n_k}) \subseteq K$ con $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. $x \in K$ que es un punto de acumulación,

K compacto, es cerrado, luego $x \in K$ (VER PRUEBA PROBLEMA ANTERIOR) y es un punto de acumulación, luego no es aislado ¡llegamos a contradicción!

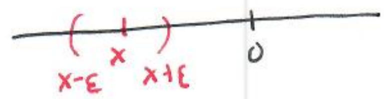
Luego necesariamente K tiene que ser finito.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 15º

a) EJEMPLO $C = [0, \infty)$.

Si $x \notin [0, \infty) \iff x < 0$



Así para $\varepsilon = \frac{-x}{2}$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (-\infty, 0)$,

luego $\mathbb{R} - C = (-\infty, 0)$ es abierto, y por tanto C cerrado. C no es compacto ya que no está acotado.

b) Sea $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, es un conjunto acotado

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, así $\overline{\{\frac{1}{n}\}} = \{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$,

no es un conjunto cerrado al no coincidir con su adherencia

PROBLEMA 16º

a) $K = [0, 1]$ compacto y $\text{Card } K > \text{Card } \mathbb{N}$. (ver cardinalidad de $\mathbb{R}$)

b) $\forall (x_n) \subseteq (0, 1) :\exists$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión convergente, pero $(0, 1)$ no es compacto, no es cerrado

c) Sí; es la caracterización de la compacidad por sucesiones (mira el apéndice de teoría correspondiente)

d) Sí, K cerrado y $K \subseteq [-M, M]$ ($\iff \forall x \in K$ $|x| \leq M$), luego acotado. K cerrado y acotado es lo mismo que compacto.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 17:

a) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n,\ 1+1/n) = [0,1]$ (*) no es un abierto.

(*) $0 \in (-1/n, 1+1/n)$ $\forall n$, luego está en la inters.

Si $x \in (0,1] \subseteq (-1/n, 1+1/n)$ $\forall n$; así $[0,1] \subseteq A$.

Si $x < 0$, existe n_0 con $x < -\frac{1}{n_0}$, luego $x \notin (-1/n_0, 1+1/n_0)$

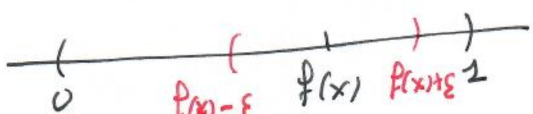
Si $x > 1$, existe n_0 con $x > 1 + \frac{1}{n_0}$, luego $x \notin (-1/n_0, 1+\frac{1}{n_0})$

b) $A = (-\varepsilon, \varepsilon) \cap [-\delta, \delta]$ con $0 < \delta < \varepsilon$

Así $A = [-\delta, \delta]$ no es abierto

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, es decir continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

Sea $x \in f^{-1}((0,1)) = A$, así $f(x) \in (0,1)$



Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subsetneq (0,1)$

por ser f continua $\exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$

$\Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon \iff f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subsetneq (0,1)$

luego $(x-\delta, x+\delta) \subseteq f^{-1}(0,1)$. Es decir x es un punto interior de $f^{-1}((0,1))$, para todo $x \in f^{-1}((0,1))$, así $f^{-1}((0,1))$ es un abierto.

d) $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ no es abierto. $\forall x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ y $\forall \delta > 0$ $\exists a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con $a \in (x-\delta, x+\delta)$, luego x no es punto interior de A. A no puede ser abierto.

TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

PROBLEMA 18: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ APLICACIÓN.

(SUPONEMOS QUE $Dom\, f = \mathbb{R}$).

a) $\Rightarrow$ b) SI f ES CONTINUA EN x_0

SEA $A \subseteq \mathbb{R}$ ABIERTO CON $f(x_0) \in A$

POR SER A ABIERTO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE
$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq A.$$

POR SER f CONTINUA EN x_0, PARA $\varepsilon > 0$, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$

LUEGO SI $B := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, SE TIENE QUE
$$f(B) \subseteq A.$$

b) $\Rightarrow$ a) SEA $f(x_0)$ Y SEA $\varepsilon > 0$, COMO $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ ES UN ABIERTO DE $\mathbb{R}$ QUE CONTIENE A $f(x_0)$ EXISTE B ABIERTO DE $\mathbb{R}$ CON $x_0 \in B$ Y TAL QUE $f(B) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

AHORA EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq B$ (POR SER x_0 PUNTO INTERIOR DE B), LUEGO $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$; $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathbb{R}$

LO QUE PRUEBA QUE f ES CONTINUA EN x_0 ∎