TOPOLOGIA DE LA RECTA REAL.

1.- Calcula el interior y la clausura de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determina, además, si son abiertos o cerrados.

a) $A = \{\, x < 0 \ : \ \frac{x+7}{3} < 3 \,\}$ **b)**$A = \{\, \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \,\}$

c) $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $A_n = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \,\}$.

2.-Construye un conjunto de números reales con exactamente tres puntos de acumulación.

3.- Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Sean $\alpha = \sup A$ y $\beta = \inf A$. Si $\alpha, \beta \notin A$, prueba que α y β son puntos de acumulación de A.

4.- Demuestra si son ciertas las siguientes afirmaciones. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **b)**$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $Int(A \cup B) = IntA \cup IntB$ **d)**$Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$.

5.- Si F es un conjunto cerrado que contiene a todos los números racionales del intervalo $[0,1]$, prueba que F contiene a todo el intervalo $[0,1]$.

6.- Dada una sucesión $(x_n)_n$ prueba que:

a) $\sup\{\, x_n \ : \ n \in \mathbb{N} \,\} = \lim_{n\to\infty} \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

b) $\inf\{\, x_n \ : \ n \in \mathbb{N} \,\} = \lim_{n\to\infty} \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

7.- Halla los puntos de acumulación de los conjuntos:

$$A = (0,1) \cup \{2\} \qquad \text{y} \qquad B = \{\, (-1)^n + 1/n \ : \ n \in \mathbb{N} \,\}.$$

8.- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Prueba que u es un punto de acumulación de A si y solo si todo intervalo abierto centrado en u contiene infinitos elementos de A.

9.- Dada una sucesión acotada $(x_n)_n$, se toman los conjuntos

$$A_k = \{\, x_n \ : \ n \geq k \,\}.$$

Se consideran

$$a_k = \sup A_k \qquad \text{y} \qquad b_k = \inf A_k \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) Comprueba que las sucesiones $(a_k)_k$ y $(b_k)_k$ son convergentes.

- Se llama ***límite superior*** de $(x_n)_n$ a:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim Sup_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} a_k.$$

- Se llama ***límite inferior*** de $(x_n)_n$ a:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim Inf_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} b_k.$$

b) Comprueba que $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

c) Demuestra que existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ si y solo si $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. En esta situación los tres límites coinciden.

d) Prueba que $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existen infinitos términos de la sucesión mayores que $a - \epsilon$ y solo una cantidad finita mayores que $a + \epsilon$.

e) Da un resultado análogo al anterior para $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

f) Prueba que si existe $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ éste es el mayor de los puntos de acumulación de sucesión.

g) Prueba que si existe $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ éste es el menor de los puntos de acumulación de sucesión.

10.- Calcula los límites superior e inferior de las sucesiones:

a) $\left((-1)^n \frac{n}{(1+n)^n}\right)_n$ **b)** $\left((1+\frac{1}{n})\cos(n\pi)\right)_n$ **c)** $\left(\operatorname{sen}(\pi n/2) + \frac{1+2^n}{2^{n+1}}\cos(\pi n/2)\right)_n$

d) $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ **e)** $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_n$ **f)** $\left(\sqrt[n]{n}\right)_n$ **g)** $\left((-1)^n + (1+\frac{1}{n})\right)_n$

h) $\left((1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n}\right)_n$ **i)** $\left(3^{(-1)^n n}\right)_n$

11.- Si (x_n) y $(y_n)_n$ son sucesiones acotadas, prueba que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

12.- Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada de términos reales positivos.

a) Prueba que:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n+1}{a_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

b) ¿Qué ocurre si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

c) Encuentra un ejemplo de una sucesión tal que exista $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, pero que no exista $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

d) Calcula los límites: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

13.-Prueba el siguiente enunciado del Teorema de Bolzano- Weierstrass: *Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.*

14.-Demuestra que un compacto formado exclusivamente por puntos aislados ha de ser finito.

15.-a) Da un ejemplo de un conjunto cerrado que no sea compacto.

b) Da un ejemplo de un conjunto acotado que no sea compacto.

16.- Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto

a) si el cardinal de K es el mismo que él de $\mathbb{N}$:

b) si toda sucesión $(x_n)_n \subseteq K$ tiene una subsucesión convergente;

c) si $(x_n)_n \subseteq K$ y $x_n \to_{n\to\infty} x$, entonces $x \in K$;

d) si K es cerrado y existe $M > 0$ de modo que $|x| \leq M$ para todo $x \in K$.

17.- ¿Cuál de las siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto?

a) $A = \cap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1+1/n)$ **b)** $A = (-\epsilon, \epsilon) \cap [-\delta, \delta]$, con $0 < \delta < \epsilon$.

c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $A = f^{-1}(\,(0,1)\,)$ **d)** $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

18.- Sea f una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es continua en x_0.

b) Para todo conjunto abierto A tal que $f(x_0) \in A$, existe un conjunto abierto B, con $x_0 \in B$, de modo que $f(B) \subseteq A$.