NÚMEROS REALES.

1.- Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, demostrándolas si son ciertas y dando un contraejemplo en caso de no serlo:

a) En $\mathbb{R}$, todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene un mínimo;

b) todo número real tiene al menos una raíz cuadrada;

c) si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$.

2.- Calcula:

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1 + 1/n, 2 + 1/n)$ b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1 - 1/n, 2 + 1/n)$ c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n, n)$

d) $\bigcap_{n=2}^{\infty}(1 + 1/n, 2 - 1/n)$ e) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$ f) $\bigcap_{n=2}^{\infty}(1 + 1/n, 2 - 1/n)$.

3.- ¿Cual de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a \leq b - \epsilon$, entonces $a = b$.

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $b - \epsilon \leq a$, entonces $a = b$.

c) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a - \epsilon \leq b$, entonces $a = b$.

d) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a \leq b + \epsilon$, entonces $a = b$.

4.- Halla el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\{\, 1/n \ : \ n \in \mathbb{N} \,\}$ b) $\{\, 1/n \ : \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \,\}$

c) $\{\, 1/n + (-1)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \,\}$ d) $\{\, x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x + 1 \geq 0 \,\}$

e) $\{\, x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x - 1 < 0 \,\}$ f) $\{\, x \in \mathbb{R}^+ \ : \ x^2 + x - 1 < 0 \,\}$.

5.- Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Prueba que $\alpha = \sup A$ si y solo si α es cota superior de A y para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ verificando que $\alpha - \epsilon < a$.

Enuncia y demuestra una propiedad análoga para el extremo inferior de un conjunto acotado inferiormente.

6.- Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos:

a) $\{3, 3'3, 3'33, 3'333, ...\}$ b) $[3, \dfrac{25}{3}] \bigcap (\dfrac{5}{4}, 8]$ c) $\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{r}, \text{ con } r > 0\}$.

d) $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = 0, a_1 a_2 a_3 .... a_n ...$ se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

7.- Demuestra que si tres números reales satisfacen que

$$a \leq x \leq a + 1/n \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{N},$$

entonces $x = a$.

8.- Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Prueba que

$$\{\, y \in \mathbb{R} \ : \ |y - a|| < \delta \,\} = (a - \delta, a + \delta).$$

9.- Se considera la familia de intervalos de $\mathbb{R}$ $\{\, (a_n, b_n) \,\}_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Si $a = \text{ínf}\, a_n$ y $b = \sup b_n$, demuestra que $\cup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) \subseteq (a, b)$.

b) Demuestra que si $(a_n, b_n) \subseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) = (a, b)$.

c) Da un ejemplo de que si $a' = \sup a_n$ y $b' = \text{ínf}\, b_n$, entonces en general **no** es cierto que $\cap_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) \subset (a', b')$; incluso si $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subseteq (a_n, b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

10.- Demuestra lo siguiente:

a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$;

b) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **c)** $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$;

d) si $x^2 = y^2$, entonces o bien $x = y$ o bien $x = -y$;

e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;

f) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$;

g) si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ¿Siempre?

11.- Comprueba que $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$ es un número natural para todo $n \in \mathbb{N}$.

12.- Prueba que $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ y que $\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$.

13.- (**Desigualdad de Bernoulli**). Prueba por inducción que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14.- Encuentra una cota superior e inferior (si existen) de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{\, \frac{x^2+2x+1}{x-1} \;:\; 0 < x < 1/2 \,\}$ b) $B = \{\, \frac{x^2+1}{x-1} \;:\; 2 < x < 2, \,\}$

c) $C = \{\, \frac{\sqrt{x}}{x^2-x+5} \;:\; 0 < x < 1 \,\}$.

15.- Demuestra que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b.$$

16.- Encontra los números reales x para los que:

a) $4 - x < 3 - 2x$ **b)** $5 - x^2 < 8$ **c)** $x^2 > 3x + 1$

d) $2x + 3 < 6$ **e)** $1 < x^2 < 4$ **f)** $x^2 + x > 2$

g) $x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$ **h)** $\frac{x-1}{x+1} > 0$ **i)** $|x - 3| = 8$

j) $|x - 3| < 8$ **k)** $|x + 4| < 2$ **l)** $|x - 1| + |x - 2| > 1$

m) $|x - 1| + |x + 1| < 1$ **n)** $|x - 1||x - 2| = 3$.

17.- Prueba que:

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \;:\; |2x+3| < 6 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; -9/2 < x < 3/2 \,\}$

b) $\{\, x \in \mathbb{R} \;:\; |x-1| < |x| \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x > 1/2 \,\}$.

18.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $|x-y| < \epsilon$. Prueba que $x = y$.

19.- Sean $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ de modo que $|w-x| < \epsilon/2$ y $|y-z| < \epsilon/2$ para algún $\epsilon > 0$. Prueba que:

$$|(w+y)-(x+z)| < \epsilon \qquad \text{y que} \qquad |(w-y)-(x-z)| < \epsilon.$$