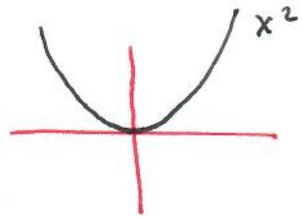
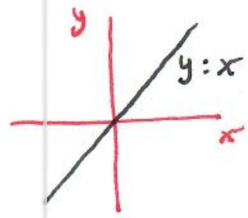
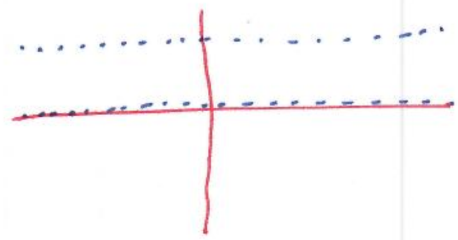
PRELIMINARES SOBRE FUNCIONES DE VARIABLE REAL

1:] $g(x) = x^2$ $\qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$







a) $h(y) \leq y$ si $0 \leq y \in \mathbb{Q}$ entonces $h(y) = y$;

Claro - $h(y) \geq 0$, si $y < 0$, entonces $y < h(y)$.

- si $y \geq 1$, como $h(y) \leq 1$, entonces $h(y)$
- si $y \in (0,1)$ y $\begin{cases} y \in \mathbb{Q} & h(y) = 0 < y \\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} & h(y) = 1 > y. \end{cases}$

b) $g(h(z)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\} = h(x)$

luego $g(h(z)) - h(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

c) Ejercicio.

d) ¿Para qué $w \in \mathbb{R}$ $(w^2)^2 \leq w^2$? Para $w = 0$ cierto.

si $w \neq 0$, $w^4 \leq w^2 \underset{w^2 > 0}{\iff} w^2 \leq 1 \iff w \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

luego para $w \in [-1, 1]$ es cierta la desigualdad.

2:] b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

$x \in \text{Dom } f$, si $1 - \sqrt{1-x^2} \geq 0$ y $(1 - x^2) \geq 0$.

- $1 - x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff x \in [-1, 1]$
- Ahora si $x \in [-1, 1] \implies 0 \leq x^2 \leq 1 \iff -1 \leq -x^2 \leq 0 \iff$
  $\iff 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \implies 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$, así

$1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. $\text{Dom } f = [-1, 1]$.

3º a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

- $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-1} \text{ existe}\} = \mathbb{R} - \{1\}$

NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO

- $\text{Im} f$ SEA $a \in \mathbb{R}$, $a \in \text{Im} f \iff$ LA ECUACIÓN $\frac{x}{x-1} = a$ TIENE SOLUCIÓN

$\iff x = (x-1)a \iff x = ax - a$

$\iff (1-a)x = -a \iff x = \frac{-a}{1-a}$

SI $a \neq 1$

PARA $a = 1$, LA EC NO TIENE SOLUCIÓN, LUEGO

$\text{Im} f = \mathbb{R} - \{1\}$.

- f ES INYECTIVA, YA QUE PARA $a \in \text{Im} f$ SOLO EXISTE UN ÚNICO $x = \frac{-a}{1-a}$ TAL QUE $f(\frac{-a}{1-a}) = a$.

- f NO ES SOBREYECTIVA, YA QUE $\text{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \subsetneq \mathbb{R}$.

d) - $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\} = \mathbb{R}$

- $\text{Im} f$, PARA $a \in \mathbb{R}$ TENEMOS QUE RESOLVER LA ECUACIÓN $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = a \iff x = a\sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1} > 0$

$\Rightarrow x^2 = a^2(x^2+1) \Rightarrow (1-a^2)x^2 = a^2 \iff$

$a \neq \pm 1$

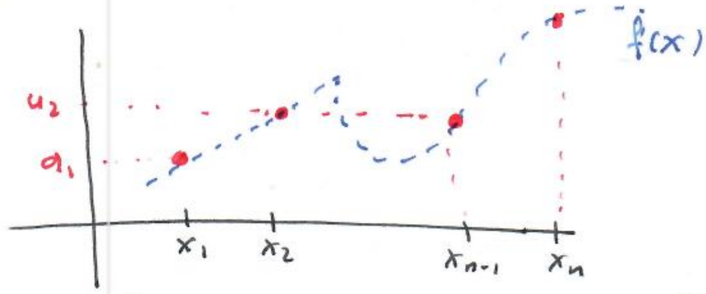
$x^2 = \frac{a^2}{1-a^2} > 0$, LUEGO $x = \pm \frac{a^2}{1-a^2}$

PARA $x = \pm 1$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ NO TIENE SOLUCIÓN

LUEGO $\text{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- f ES INYECTIVA, YA QUE SI $a > 0$ $f(\frac{a^2}{1-a^2}) = a$ Y SI $a < 0$ $f(-\frac{a^2}{1-a^2}) = a$. NO ES SOBREYECTIVA.

4:] Sean $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ distintos; podemos suponer que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$



Buscamos $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ polinomio

tal que
$$
\left.
\begin{aligned}
f(x_1) &= a_1 = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_{n-1} x_1^{n-1} \\
f(x_2) &= a_2 = c_0 + c_1 x_2 + \dots + c_{n-1} x_2^{n-1} \\
&\vdots \\
f(x_n) &= a_n = c_0 + c_1 x_n + \dots + c_{n-1} x_n^{n-1}
\end{aligned}
\right\}
$$

Sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$.

Ver teoría de álgebra lineal.

Este sistema tiene como determinante de coeficientes

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & & \vdots \\
 & & & & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} \neq 0
$$

Determinante de Vandermonde. No nulo si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Luego el sistema tiene una única solución; con ella se determina f.

5:] Sea f inyectiva e $I \subseteq \mathrm{Dom}\, f$

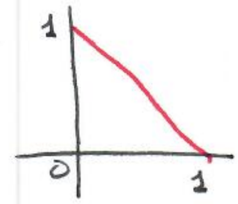
- Si $x, y \in I \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ y $f|_I(x) = f|_I(y) \iff f(x) = f(y) \Rightarrow$ (f inyectiva) $x = y$; luego $f|_I$ inyectiva.

- Si f, g son inyectivas y para $x, y \in \mathrm{Dom}\, g \circ f \subseteq \mathrm{Dom}\, f$ se sigue que $g \circ f(x) = g \circ f(y) \iff g(f(x)) = g(f(y))$, y por ser g inyectiva $f(x) = f(y)$, $f(x), f(y) \in \mathrm{Dom}\, g$, y por ser f inyectiva $x = y$. Luego $g \circ f$ es inyectiva.

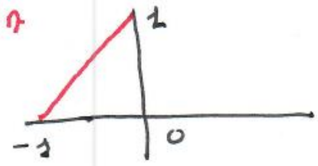
El resto ejercicio.

6º) a) $|x|+|y|=1$

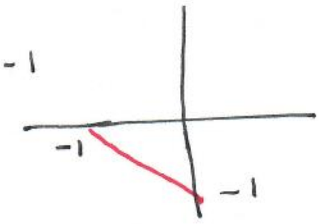
— Si $x\geq 0,\ y\geq 0 \Rightarrow x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$ recta



— Si $x<0,\ y>0 \Rightarrow -x+y=1 \Leftrightarrow y=1+x$ recta

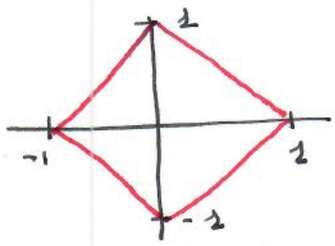


— Si $x<0,\ y<0 \Rightarrow -x-y=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=-x-1$ recta



— Si $x>0,\ y<0 \Rightarrow x-y=1 \Leftrightarrow y=x-1$ recta

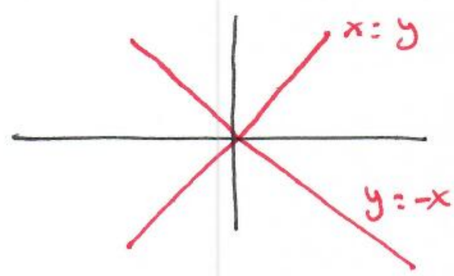
Luego el conjunto de puntos es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$.



g) $x^2+y^2=0$, $x^2, y^2\geq 0$ luego $x^2+y^2=0$
$\Leftrightarrow x=y=0$

h) $x^2=y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=(x-y)(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ recta} \\ \text{ó} \\ (x+y)=0 \Leftrightarrow -x=y \text{ recta} \end{cases}$$



7º) Sea $x, y\in \mathrm{Dom}\, f$ con $x\neq y$. Pongamos $x<y$. Entonces por ser f estrictamente monótona se sigue que $f(x)<f(y)$ ó bien $f(y)<f(x)$; en cualquier caso
$f(x)\neq f(y)$.
Por tanto f es inyectiva.

PROBLEMA 8: a) Si $f, g\ I \to \mathbb{R}$ son crecientes y $x, y \in I$ con $x < y$, entonces

$$f(x) < f(y)$$

y $g(x) < g(y)$ luego

$$f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$$

(claro $f(x) < f(y) \Leftrightarrow f(x) + g(x) < f(y) + g(x)$

y $g(x) < g(y) \Leftrightarrow f(y) + g(x) < f(y) + g(y)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) + g(x) < \ldots < f(y) + g(y)$)

Así $f + g$ es creciente

b) Si $f, g\ I \to \mathbb{R}$ son crecientes y $f, g > 0$

lo de arriba no dice también que $f \cdot g$

es creciente.

Ahora en general no es cierto..:

Ejemplo $f(x) = x^2$, $g(x) = -\frac{1}{x}$ $x > 0$.

f, g son crecientes en $(0, \infty)$ ¡comprobar!

Ahora $f \cdot g(x) = -x$ que es decreciente en $(0,\infty)$.

c) Si f es biyectiva, existe f^{-1}.

Si además f es creciente, f^{-1} también lo es

Dem Sea $x, y \in B$ con $x < y$;

existen $a, b \in B$ con $f(a) = x$ y $f(b) = y$.

Como f es creciente, e inyectiva, necesariamente

$a < b$; así $f^{-1}(x) = a < f^{-1}(y) = b$

por lo tanto f^{-1} es creciente.

PROBLEMA 4:

a)

+	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	??
g IMPAR	??	IMPAR

- SI f, g SON PARES $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) =$
$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

- DE FORMA ANÁLOGA SI f Y g SON IMPARES

- SEA $f(x) = |x|$ PAR Y
SEA $g(x) = \operatorname{sen} x$ IMPAR.

$f+g(\pi/2) = \pi/2 + 1$ LUEGO f + g NO ES
$f+g(-\pi/2) = \pi/2 - 1$ NI PAR NI IMPAR.

b)

×	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	IMPAR
g IMPAR	IMPAR	PAR

- SI f ES IMPAR Y g PAR, ENTONCES
$f \cdot g(-x) = f(-x)\, g(-x) = -f(x)\, g(x) = -f g(x)$
LUEGO $f \cdot g$ ES IMPAR

c)

o	f PAR	f IMPAR
g PAR	PAR	PAR
g IMPAR	PAR	IMPAR

- SI g ES PAR
$f \circ g(-x) = f(g(x)) = f \circ g(x)$
ES PAR INDEPENDIENTE DE LO QUE SEA f

- SI f Y g SON IMPARES $f \circ g(-x) = f(g(-x)) =$
$= f(-g(x)) = -f \circ g(x)$. $f \circ g$ ES IMPAR

PROBLEMA 10:

SEA $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

ES UNA FUNCIÓN PAR

SEA $f_2(x) = \dfrac{-f(-x) + f(x)}{2}$

ES UNA FUNCIÓN IMPAR

CLARO $f_2(-x) = \dfrac{-f(-(-x)) + f(-x)}{2} =$

$= \dfrac{-f(x) + f(-x)}{2} = -\dfrac{-f(-x) + f(x)}{2} =$

$= f_2(x)$.

ADEMAS $f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.

— · —

SUPONGAMOS QUE $f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2'$

CON f_1 f_1' PARES Y $f_2 + f_2'$ IMPARES.

ASÍ $\underbrace{f_1 - f_1'}_{PAR} = \underbrace{f_2' - f_2}_{IMPAR}$ VER EJERCICIO ANTERIOR.

SI g ES PAR E IMPAR A LA VEZ, ENTONCES

$g(-x) = g(x) = -g(x) \Rightarrow g(x) = 0$.

LUEGO $f_1 - f_1' = 0 \Rightarrow f_1 = f_1'$

Y $f_2' - f_2 = 0 \Rightarrow f_2 = f_2'$.

— · —

PROBLEMA 11:

SI f ESTA ACOTADA $\Leftrightarrow$ f ESTA ACOTADA SUPERIORMENTE E INFERIORMENTE $\Leftrightarrow$

$\exists\, M, m \in \mathbb{R}$ TAL QUE $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in Dom\, f$.

SEA $K = \max\{m, |m|, M, |M|\}$ ENTONCES

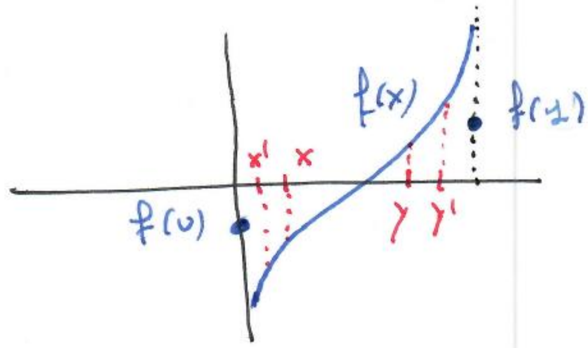
$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in Dom\, f$

AL CONTRARIO SI $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in Dom\, f$, ENTONCES

$-M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in Dom\, f$, LO QUE DEMUESTRA QUE f ESTA ACOTADA INFERIOR Y SUPERIORMENTE Y POR TANTO ACOTADA.

PROBLEMA 12: SI, SI NO 1-1 CONTINUA

POR EJEMPLO



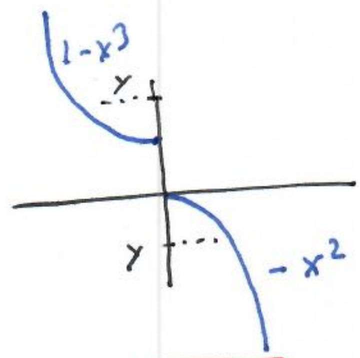
PROBLEMAS 13:

a) $f(x) = x^3 + 1$

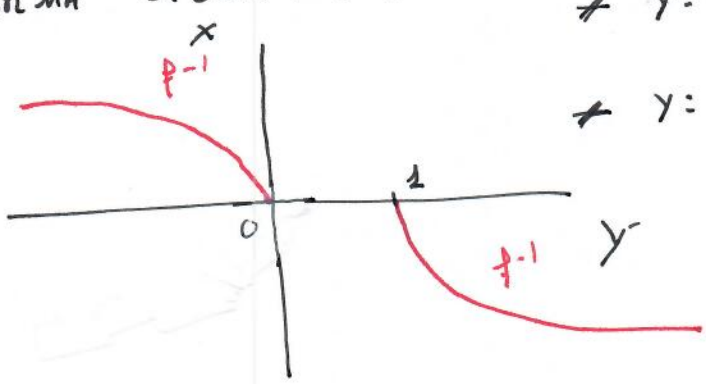
$y = x^3 + 1$. DESPEJAMOS LA x.

$x^3 = y - 1$ y $x = \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{SI } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{SI } x < 0 \end{cases}$



DE FORMA GEOMÉTRICA



- $y = -x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{-y}}$ SI $y < 0$
- $y = 1 - x^3 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1-y} \quad y > 1}$

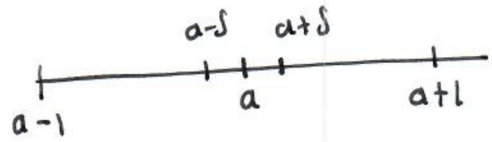
PROBLEMA 14:

a) $f(x) = x^4$ y $\rho = a^4$

$$|x^4 - a^4| \le |(x^2-a^2)(x^2+a^2)| \le$$

$$\le |x-a|\,|x+a|\,|x^2+a^2| \le$$

$\boxed{\text{SI } x \in [a-1, a+1]}$



$$\le |x-a|\,(2r\,2r^2)$$

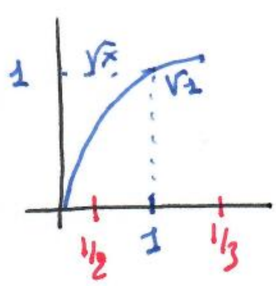
$r = \max |a-1|, |a+1|$.

SEA $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4r^3} \right\}$

ENTONCES SI $x \in (a-\delta, a+\delta) \to$

$$|x^4 - a^4| \le |x-a|\,4r^3 \le \delta\, 4r^3 < \frac{\varepsilon}{\cancel{4r^3}}\cancel{4r^3} = \varepsilon.$$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ $a = 1$ $\rho = 1$



$$|\sqrt{x} - 1| = \frac{|\sqrt{x}-1|\,|\sqrt{x}+1|}{|\sqrt{x}+1|} =$$

$$= \frac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|} \le |x-1|.$$

$|\sqrt{x}+1| > 1$
PARA $x > 0$

SI TOMAMOS $\delta = \varepsilon$. HEMOS TERMINADO

16: $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\iff \forall M < 0$ $\exists \delta > 0$ TAL QUE SI

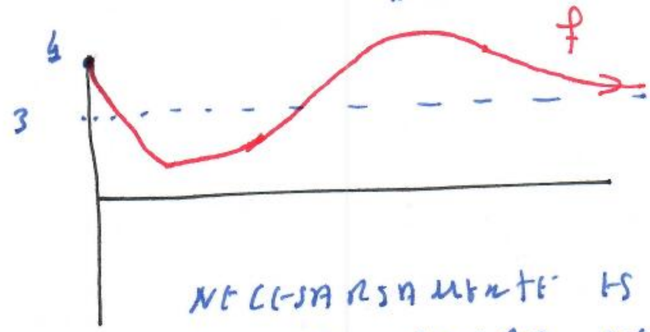
$0 < a - x < \delta$, ENTONCES

$f(x) < M$

LA RESPUESTA CORRECTA ES LA c)

PROBLEMA 17: $f\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$ CONTINUA, $f(0) = 6$

Y $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$



f NO ES CRECIENTE
f NO ES CONVEXA
f NO ES CONCAVA

NECESARIAMENTE ES ACOTADA, POR EXCLUSIÓN. LA PRUEBA NECESITA ALGO MÁS DE TEORÍA:

f ES CONTINUA $\Rightarrow$ f ACOTADA

TEOREMA: SI $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ES CONTINUA $\quad \forall x > M \Rightarrow |f(x)-3| < 1/2$

ASÍ PARA $\varepsilon = 1/2$ $\exists M > 0$ TAL QUE

(PUESTO QUE $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$) ASÍ $f|_{(M,\infty)}$ ESTÁ ACOTADA

COMO $f\ [0, M] \to \mathbb{R}$ ES CONTINUA, TAMBIÉN ESTÁ ACOTADA. LUEGO TODA LA f LO ESTÁ.

PROBLEMA 18:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y \in \mathbb{R}$ CON $f(x_0) = y$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ TAL QUE SI $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon \qquad$ CON $f(x_0) = y$

ASÍ $|f(x_0) - y| = 0 < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TAL QUE SI $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (INCLUSIVE $x = x_0$)

$\Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon.$

PROBLEMA 19: a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{SI } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{SI } 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad x_0 = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$; OBSERVEMOS QUE $2 - 1 = 1$.

PARA $\varepsilon > 0$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} |x^2 - 1| = |x-1||x+1| \underset{x \in [0,1]}{\leq} 2|x-1| \leq \varepsilon \quad \delta_1 < \varepsilon/2 \\ |2 - x - 1| = |1 - x| < \varepsilon \quad \delta_2 < \varepsilon \end{array} \right.$

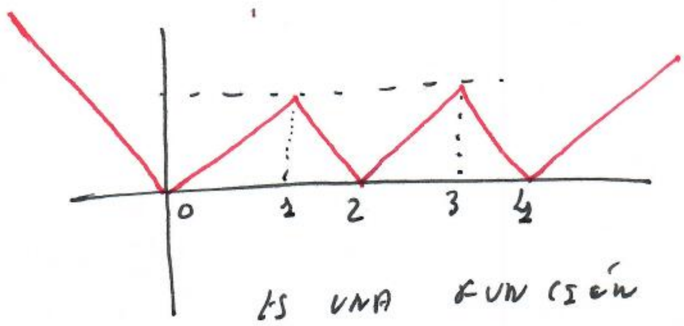
LUEGO SI $\delta < \min\{\varepsilon/2, \varepsilon\}$ Y PARA TODO $x \in (1-\delta, 1+\delta)$

$|f(x) - 1| < \varepsilon$. ASÍ f ES CONTINUA EN $x = 1$

CON MÁS TEORÍA, ALGO MÁS QUE LA DEFINICIÓN, ESTOS EJERCICIOS SON MUCHO MÁS SENCILLOS

PROBLEMA 20:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ x-2 & \text{si } x \in (2,3] \\ 4-x & \text{si } x \in (3,4] \\ x-4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



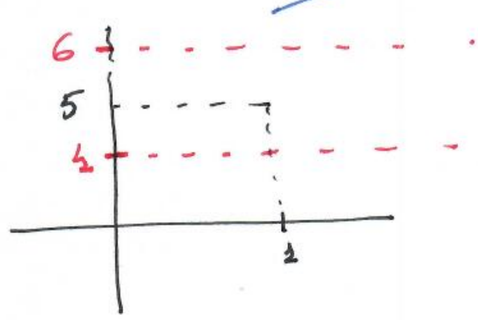
Es una función con 3 raíces $\{0, 2, 4\}$ que es continua; la prueba como el ejercicio anterior (con más teoría es trivial)

No es un polinomio ya que si $P(x)$ polinomio verifica que $P(0) = P(2) = P(4) = 0$ entonces

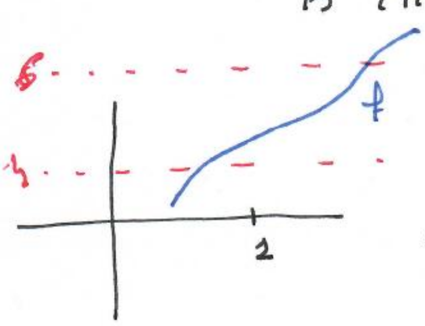
$$P(x) = x(x-2)(x-4)\,Q(x) \qquad Q(x) \text{ polinomio}$$

Así $P(x) \neq f(x)$.

PROBLEMA 21: $f(x) = x^2+3x+1$ $\quad f(1) = 1+3+1 = 5$



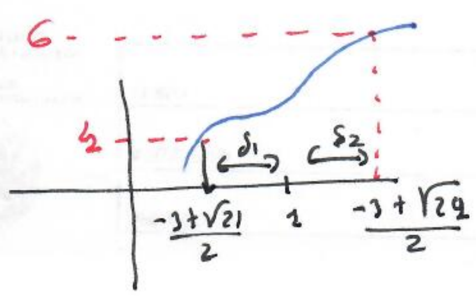
Si $0 < x < y$
entonces $x^2 < y^2$
y $3x < 3y$
y $1 \leq 1$
luego $f(x) < f(y)$; así f es creciente en $[0, \infty)$.



f creciente; también por ser monótona inyectiva en $(0, \infty)$

Resolvemos $x^2+3x+1 = 4 \iff x^2+3x-3 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{2}; \quad \frac{-3+\sqrt{21}}{2} > 0$$

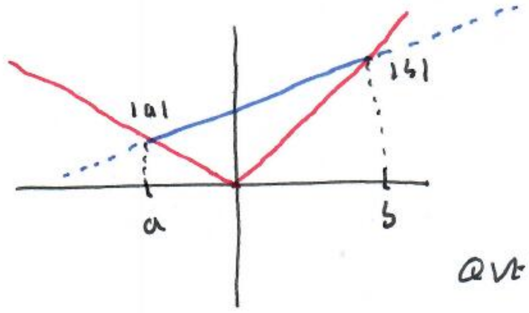


Resolvemos $x^2+3x+1 = 6 \iff x^2+3x-5 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{2}; \quad x = \frac{-3+\sqrt{9+20}}{2} > 0$$

Se toma $\delta = \min\left\{\left|\frac{-3+\sqrt{21}}{2} - 1\right|, \left|\frac{-3+\sqrt{29}}{2} - 1\right|\right\}$.

PROBLEMA 22: EJEMPLO $f(x) = |x|$



Geométricamente la cuerda que une los puntos $(a, |a|)$ y $(b, |b|)$ queda por encima de la gráfica de f

PROBLEMA 23: ¿ $\lim_{x\to\infty} x^2+x+1 = \infty$?

Si $x > 1$ $\quad x^2+x+1 \geq x^2 \geq x$

Luego $\forall M>0$ si $x > M+1$ se sigue que

$$f(x) = x^2+x+1 \geq x > M+1 > M.$$

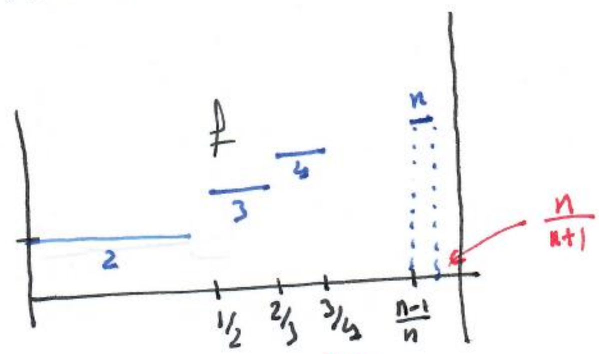
PROBLEMA 24: $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$

Para $x_n = \dfrac{1}{\pi/2+2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(x_n) = \operatorname{sen}(\pi/2+2n\pi) = 1$

Para $y_n = \dfrac{1}{\pi+2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(y_n) = \operatorname{sen}(\pi+2n\pi) = 0$

Así $\forall \delta>0$ si $|x|<\delta$ no podemos asegurar que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ se acerque a ningún número de forma única

PROBLEMA 25: a)



$$[0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{n-1}{n}, \tfrac{n}{n+1}\right)$$

$$f|_{[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1})} \equiv n.$$

$\frac{n-1}{n} \uparrow 1$, función constante

y f no puede ser continua en $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) Sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\delta > b-a$ $\quad$ n existe por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$. Si las discontinuidades fuesen infinitas, podríamos encontrar $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, con $x_j \in [a,b]$ $j = 1 \dots n+1$ y f discontinua en dichos

$$\sum_{j=1}^{n} |x_{j+1} - x_j| > n\delta > |a-b|.$$

¡Lo cual no es posible! claramente.