**PRELIMINARES SOBRE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.**

**1.-** Sean $g(x) = x^2$ y $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

**a)** ¿Para qué $y \in \mathbb{R}$ se verifica que $h(y) \leq y$? **b)** ¿ Qué es $g(h(z)) - h(z)$ ?

**c)** ¿Para qué $w \in \mathbb{R}$ se tiene que $g(w) \leq w$? **d)** ¿Para qué $\epsilon \in \mathbb{R}$, se tiene $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$?

**2.-** Encuentra el dominio de las funciones definidas por las fórmulas:

**a)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

**d)** $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-2}}$ **e)** $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.

**3.-** Para las siguientes funciones reales de variable real, determina sus dominios e imágenes, y estudia cuáles de ellas son inyectivas, suprayectivas o biyectivas.

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ c) $f(x) = |x|$ d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**4.-** Sean $x_1, x_2, ...., x_n$, $n$ números reales distintos. Encuentra una función polinómica $f$ de grado $n-1$ de modo que $f(x_k) = a_k$, k=1,2,..,n, donde $a_1.a_2, ..., a_n$ son números reales dados.

**5.-** Demuestra que toda restricción de una función inyectiva es inyectiva y que toda composición de funciones inyectivas (respectivamente, suprayectivas) también es inyectiva (resp. suprayectiva).

**6.-** Dibuja los conjuntos de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican las siguientes condiciones:

**a)** $|x| + |y| = 1$ **b)** $|x| - |y| = 1$ **c)** $|x-1| = |y-1|$

**d)** $xy = 0$ **e)** $|x| - |y| = 1$ **f)** $|1-x| = |y-1|$

**g)** $x^2 + y^2 = 0$ **h)** $x^2 = y^2$ **i)** $x^2 - 2x + y^2 = 4$.

**7.-** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona (creciente o decreciente). Prueba que f es inyectiva.

**8.-**a) ¿Es creciente la suma de funciones crecientes?

b) ¿Es creciente el producto de funciones crecientes?

c) Si $f : A \to B$ es biyectiva y creciente ¿es creciente su inversa $f^{-1} : B \to A$?

**9.-** Sean $f, g$ dos funciones definidas en toda la recta real que pueden ser ambas pares o impares o una par y la otra impar.

**a)** Determina si $f+g$ es par o impar o nada de lo anterior, dependiendo de si lo son $f$ y $g$ (la solución se puede presentar en una tabla $2 \times 2$).

**b** Lo mismo para $fg$ y para $f \circ g$.

**10.-** Demuestra que cualquier función $f$, cuyo dominio es toda la recta real, puede escribirse de la forma $f = f_1 + f_2$ donde $f_1$ es una función par y donde $f_2$ es una función impar. Demuestra que esta manera de expresar $f$ es única.

**11.-** Prueba que una función $f$ esta acotada si y solo si existe $M > 0$ de modo que

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x \in Dom\, f$$

**12.-** ¿Es posible construir una función definida en el intervalo $[0,1]$ que sea acotada y que no tenga máximo ni mínimo absolutos?

**13.-** Halla $f^{-1}$ para cada una de las siguientes funciones. Cuando sea posible traza la gráfica de la inversa.

a) $f(x)=x^3+1, \quad x\in\mathbb{R}$ b) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}, \quad x\in(-1,1)$ c) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 1-x^3 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$.

**14.-** Da un ejemplo de una función $f$ para la cual la siguiente proposición sea falsa: si $|f(x)-\rho|<\epsilon$ cuando $0<|x-x_0|<\delta$, entonces $|f(x)-\rho|<\epsilon/2$ cuando $0<|x-x_0|<\delta/2$.

**15.-** En cada uno de los casos siguientes, encontrar un $\delta$ tal que $|f(x)-\rho|<\epsilon$ para todo $x$ que satisfaga $0<|x-a|<\delta$ :

**a)** $f(x)=x^4$ y $\rho=a^4$ **b)** $f(x)=1/x$, $a=1$ y $\rho=1$

**c)** $f(x)=x^4+1/x$, $a=1$ y $\rho=2$ **d)** $f(x)=\sqrt{|x|}$, $a=0$ y $\rho=0$

**e)** $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$ y $\rho=1$ .

**16.-** $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ es equivalente a decir que:

**a)** para todo $M>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<a-x<\delta$, entonces $f(x)<M$;

**b)** para todo $M<0$ existe $\delta>0$ tal que si $a-x<\delta$, entonces $f(x)<M$;

**c)** para todo $M<0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<a-x<\delta$, entonces $f(x)<M$;

**d)** para todo $M>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<a-x<\delta$, entonces $f(x)>M$.

**17.-** De una función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que es continua, que $f(0)=4$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$, entonces:

a) $f$ es creciente b) $f$ es acotada c) $f$ es convexa d) $f$ es concava.

**18.-** Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$. Prueba que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

**a)** existe $\lim_{x\to x_0} f(x)=y\in\mathbb{R}$, y además $f(x_0)=y$;

**b)** para todo $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ de modo que si $|x-x_0|<\delta$, entonces $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

**19.-** Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos donde se indica:

**a)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \end{cases}$, en el 1. **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in[0,1) \\ 3 & \text{si} \quad x\in[1,2] \\ -+5x & \text{si} \quad x\in(2,3] \end{cases}$, en $[0,3]$.

**c)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, en $\mathbb{R}$. **d)** $f(x)=x^3-x$, en $\mathbb{R}$.

**20.-** Da un ejempo de una función continua en todo $\mathbb{R}$ que tenga exactamente 3 raíces y que no sea una función polinómica. Justifica la respuesta.

**21.-** Sea $f(x) = x^2+3x+1$. Encuentra el mayor $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ se tenga que $f(x) \in [4, 6]$.

**22.-** Dar un ejemplo de una función convexa en todo $\mathbb{R}$ y prueba que lo es (**No se puede usar derivadas**).

**23.-** Comprueba que $\lim_{x\to\infty} x^2 + x + 1 = \infty$.

**24.-** Prueba que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en $x = 0$. Prueba que, sin embargo la función $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si lo tiene.

**25.-** a) Encuentra un ejemplo de una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, monótona creciente y de modo que el cardinal del conjunto de discontinuidades de $f$ en $[0, 1]$ sea igual al cardinal de $\mathbb{N}$.

b) De una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se sabe que es monótona y que existe $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in [a, b]$ son dos puntos donde $f$ es discontinua, entonces $|x - y| > \delta$. Prueba que el cardinal del conjunto de discontinuidades de $f$ es a lo más finito.