SUCESIONES NÚMERICAS.

1.- Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = 1/2$.

2.- Demuestra que:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0$ **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$ **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$

d) Si $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ **e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5-7n}{n^6-2n^2} = 0$

f) Si $p > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ **g)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

h) Si $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$

i) Si $x > 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ **j)** Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

k) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = 3$ **l)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \infty$.

3.- De la sucesión $(x_n)_n$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es su límite? Razona la respuesta. Encuentra un ejemplo.

4.- Aplicando la definición de límite de una sucesión, demuestra que $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{4n} = 3/4$. Halla un número natural N de manera que para todo $n \geq N$ se verifica que

$$\left| \frac{3n-1}{4n} - \frac{3}{4} \right| < 10^{-3}.$$

5.- Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente a un punto x.

a) Si $a > x$, prueba que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > n_0$, tiene que $a > x_n$.

b) Si $a < x$, prueba que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n > n_0$, tiene que $a < x_n$.

6.- Estudiar la convergencia de las sucesiones siguientes:

a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$ **b)** $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$ **c)** $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$ **d)** $\left(2+\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^\infty$

e) $\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\right)_{n=1}^\infty$ **f)** $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)_{n=1}^\infty$ **g)** $(\sqrt{n^2+n} - n)_{n=1}^\infty$

7.- Prueba que todo número real es límite:

a) de una sucesión de números racionales;

b) de una sucesión de números irracionales.

8.- Sea $x \in \mathbb{R}$ cuya forma decimal es $x = r, a_1a_2...a_na_{n+1}......$. Se considera la sucesión $(x_k)_{k=1}^\infty = (r, a_1...a_k)_{k=1}^\infty$. Prueba que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.
Comprueba que la sucesión $0,5 \quad 0,55 \quad 0,555, ...$ converge a $\frac{5}{9}$.

9.- Sea $x_n \to_{n\to\infty} x$. Sea $k \in \mathbb{N}$.

a) Se define la sucesión $(y_n)_n$ por $y_n = x_{n+k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $y_n \to_{n\to\infty} x$.

b) Sean $a_1, a_2, ..., a_k$ k números reales cualesquiera. Se define lasucesión $(y_n)_n$ por

$$y_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad n = 1, 2, ..., k \\ \\ x_n & \text{si} \qquad n > k \end{cases}.$$

Prueba que $y_n \to_{n\to\infty} x$.

10.- Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales tal que $x_{2n} \to_{n\to\infty} x$ y que

$$|x_{2n} - x_{2n-1}| < 1/n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

a) $(x_n)_n$ converge a cero. **b)** $x_{3n} \to_{n\to\infty} x$

c) $(x_n)_n$ no esconverge. **d)** $(x_n)_n$ no es de Cauchy.

11.- Da un ejemplo de dos sucesiones divergentes tales que su suma converja y otro de dos sucesiones divergentes cuyo producto sea convergente.

12.- a) Da un ejemplo de una sucesión convergente $(x_n)_n$, con $x_n > 0$ para todo n, de modo que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

b) Da un ejemplo de una sucesión divergente $(x_n)_n$, con $x_n > 0$ para todo n, de modo que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

13.- Demuestra que $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+n}$ es una sucesión decreciente y que todos los términos de la sucesión son menores que 2.

14.- Comprueba si es cierta o no la siguiente proposición:
Sea $(x_n)_n$ una sucesión creciente de números reales de modo que para

$$s_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \qquad \textit{con} \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

se tiene convergencia, es decir existe $\lim_{k\to\infty} s_k = y$. Entonces la sucesión $(x_n)_n$ también es convergente y su límite es y.

15.- Prueba que toda sucesión monótona decreciente acotada inferiormente es convergente.

16.- Se considera la sucesión $(x_n)_n$ dada por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4$ para $n + 1 \geq 2$. Demuestra que $x_n < 6$ para todo n. Prueba también que la sucesión es creciente. ¿Es convergenta la sucesión?

17.- Se considera la sucesión $(x_n)_n$ dada por $x_1 = 3/2$ y $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ para $n + 1 \geq 2$. Demuestra que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo n. Prueba también que la sucesión es decreciente. ¿Es convergenta la sucesión?

18.- Sea una sucesión de **intervalos cerrados encajados**; es decir $(\,[a_n, b_n]\,)_{n\geq 1}$, con $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ para todo n. Prueba que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$