ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

REORDENAMIENTO DE SERIES.

La suma de números reales tiene la propiedad conmutativa. La suma de una serie no es propiamente una suma ya que hay un paso al límite. Nos podríamos preguntar si hay algún tipo de conmutatividad en la suma de series. Para ello damos el concepto de reordenamiento.

REORDENAMIENTO DE SUCESIONES. Vamos a considerar una biyección de los Naturales en si mismos

$$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

π una biyección.

Definición. 1. *Dada una sucesión* $(a_n)_n$ *y una biyección* π *sobre* $\mathbb{N}$ *a la sucesión*

$$(b_n)_n = (a_{\pi(n)})$$

se le llama una reordenación de la sucesión $(a_n)_n$*.*

Ejemplo. 1. *Dada la sucesión* $(\frac{1}{n})_n$ *y la biyección*

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \to & \pi(n) = \begin{cases} 2k-1 & si \quad n = 2k, \text{ es par} \\ 2k & si \quad n = 2k-1, \text{ es impar} \end{cases} \end{array}$$

La sucesión $(\frac{1}{\pi(n)})$=$\{1/2, 1, 1/4, 1/3, ...\}$ *es una reordenación de la sucesión* $(\frac{1}{n})_n$*.*

Teorema. 1. *Dada una serie absolutamente convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y cualquier reordenación* $(b_n)_n = (a_{\pi(n)})$*, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es también absolutamente convergente y además*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración: Sean $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ y $t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar n_0 de modo que para todo $N \geq n_0$ se tiene que

$$|\sum_{j=1}^{\infty} a_j - s_N| < \epsilon$$

y también que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| - \sum_{j=1}^{N} |a_j| = \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon.$$

Ahora elegimos $M = \text{máx}\{\, \pi^{-1}(1), \ldots.., \pi^{-1}(N) \,\} \in \mathbb{N}$, así los términos

$$a_1, a_2, ..., a_N$$

estarán entre los términos

$$b_1, b_2, ...b_M.$$

Entonces, siempre que $m > M$, la diferencia

$$t_m - s_N \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \epsilon.$$

Por otro lado, para $m > M$, se tiene que

$$|\sum_{j=1}^{\infty} a_j - t_m| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_j - s_N - t_m + s_N| \leq$$

$$|\sum_{j=1}^{\infty} a_j - s_N| + |t_m - s_N| \leq \epsilon + \epsilon.$$

Por definición de límite, lo anterior prueba que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} b_n$ converge a $\sum_{j=1}^{\infty} a_n$.

La misma prueba nos dice que la serie en valor absoluto $\sum_{j=1}^{\infty} |b_n|$ converge a $\sum_{j=1}^{\infty} |a_n|$. Así la serie $\sum_{j=1}^{\infty} b_n$ es absolutamente converge $\square$

Las series absolutamente comvergentes se comportan muy bien. En cambio las series condicionalmente convergentes tiene un comportamiento sorprendente. El siguiente resultado se debe a Riemann.

Teorema. 2. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ condicionalemanete convergente (converge, pero no absolutamente convergente), entonces para todo número $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reordenación $(b_n)_n$ de $(a_n)_n$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.*

Demostración: Consideramos la parte positiva y negativa de la sucesión $(a_n)_n$, es decir

$$p_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad q_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad a_n < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a_n \geq 0. \end{cases}$$

Las series $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ no son ninguna convergente. Claro, de serlo una lo sería la otra ya que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. En este caso llegaríamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

es convergente, lo cuál sabemos que no lo es.

Tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$. supongamos que $\alpha \geq 0$. La prueba para $\alpha < 0$, pasa por tomar $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$, reordenarla para que sume $-\alpha$ y después cambiar de signo.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ no es convergente podemos encontrar

$$N_1 = \min\{N \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{n=1}^{N} p_n > \alpha\}.$$

Tenemos que

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \leq \alpha.$$

Además, $S_1 - \alpha \leq p_{N_1} \neq 0$.

Tomamos ahora

$$M_1 = \min\{M \in \mathbb{N} \ : \ S_1 + \sum_{n=1}^{M} q_n < \alpha\}.$$

Tenemos que

$$T_1 = S_1 + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha \qquad \text{y} \qquad S_1 + \sum_{n=1}^{M_1-1} q_n \geq \alpha.$$

Además, $T_1 - \alpha \geq q_{M_1} \neq 0$.

Repitiendo el proceso. Tomamos

$$N_2 = \min\{N > N_1 \ : \ T_1 + \sum_{n=N_1+1}^{N} p_n > \alpha\}.$$

Tenemos que

$$S_2 = T_1 + \sum_{n=N_1+1}^{N_2} p_n > \alpha \qquad \text{y} \qquad T_1 + \sum_{n=N_1+1}^{N_2-1} p_n \leq \alpha.$$

Además, $S_2 - \alpha \leq p_{N_2} \neq 0$.

Tomamos ahora

$$M_2 = \min\{M > M_1 \ : \ S_2 + \sum_{n=M_1+1}^{M} q_n < \alpha\}.$$

Tenemos que

$$T_2 = S_2 + \sum_{n=1}^{M_2} q_n < \alpha \qquad \text{y} \qquad S_2 + \sum_{n=M_1+1}^{M_2-1} q_n \geq \alpha.$$

Además, $T_2 - \alpha \geq q_{M_2} \neq 0$.

Si seguimos repetiendo el proceso conseguimos una reordenación de la sucesión $(a_n)_n$ dada por (nos saltamos los $q_j = 0$, para no repetir términos nulos)

$$p_1, p_2, \ldots.., p_{N_1}, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, q_{M_1+1} \neq 0, \ldots., q_{M_2}, \ldots.etc$$

Ahora tenemos que ver que la suma de esta reordenación converge a α. Para ello usaremos que las sucesiones $(p_{N_j})_j$ y $(q_{M_j})_j$ convergen a cero. Así dado $\epsilon > 0$ existe k_0 de modo que para todo $k \geq k_0$ se verifica que

$$|\alpha - S_k| \leq p_{N_k} \leq \epsilon,$$
$$|\alpha - T_k| \leq -q_{M_k} \leq \epsilon.$$

Esto lo que quiere decir es que las sucesiones $(S_k)_k$ y $(T_k)_k$ convergen a α.

Ahora tomemos cualquier S, suma parcial de la sucesión reordenada, de manera que al menos el elemento $q_{M_{k_0}}$ este entre sus sumandos. Considerando el

$$K = \text{máx}\{k \ : q_{M_k} \text{aparece en la suma } S\},$$

entonces $\text{máx}\{T_K, T_{K+1}\} \leq S \leq S_{K+1}$. Observemos que ambos extemos de la desigualdad anterior convergen a α luego también la "S" $\square$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es