APLICACIONES. CARDINALIDAD.

Dados dos conjuntos A y B, podemos emparejar los elementos de A con los del conjunto B. Si lo hacemos de modo que para todo elemento $a \in A$ le asociamos, a lo más, con un único elemento $b \in B$, escribimos $f(a) = b \in B$, decimos que esta "operación" es una **aplicación** de A en B.

Ejemplos 1.

- *Sea A el conjunto de alumnos de una clase.*

$$A = \{Juan,\ Elisa,\ Alba,\ Jesús \ldots\}$$

y B el conjunto de notas posibles de 0 a 10, normalmente un entero con un decimal. Después del primer examen parcial, cada alumno que se haya presentado al examen tendrá su correspondiente nota: $N(Juan) = 3,2$; $N(Alba) = 6,7$; $N(Jesús) = 1,3$; ....etc. Elisa no se ha presentado y por tanto no tienen nota. Lo anterior es un ejemplo de aplicación.

- *Se considera la sucesión $(e^n)_{n=1}^{\infty}$, que podemos ver como una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} & \\ & & n & \to & f(n) & = & e^n. \end{array}$$

- *Consideramos la siguiente asignación*

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = & e^x - 1. \end{array}$$

*Esto es lo que llamariamos una **función real de variable real**, el objeto principal de nuestro estudio.*

Formalmente:

Definición 1. *Una **Aplicación** f entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano de A por B, $f \subset A \times B$, de modo que si $a \in A$ y $(a, b_1), (a : b_2) \in f$, entonces $b_1 = b_2$.*

a: *Se llama **Dominio** de una aplicación f al siguiente subconjunto de elementos de A,*

$$Domf = \{a \in A \ : \ \exists b \in B \ \ con \ \ (a, b) \in f\}.$$

b: *Se llama **Imagen** o **Rango** de f al siguiente subconjunto del conjunto B,*

$$Imf = \{b \in B \ : \ \exists a \in A \ \ con \ \ f(a) = b\}.$$

Observación 1. *Dada una aplicación escribimos $f(a) = b$, en lugar de $(a, b) \in f$.*

A nosotros nos va a interesar el estudio de aplicaciones entre números reales. Las aplicaciones usualmente las llamaremos **funciones**.

Definición 2.

- *Una aplicación de la recta real en si misma,*

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) & = & y, \end{array}$$

la llamaremos función real de variable real. LLamaramos a "x" la variable y su valor asociado "y" la imagen de "x".

- *Llamamos* ***Dominio*** *de la función f al siguiente subconjunto de elementos de $\mathbb{R}$,*

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\}.$$

- *Llamamos* ***Imagen*** *o* ***Rango*** *de f al siguiente subconjunto del conjunto $\mathbb{R}$,*

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ con \ \ f(x) = y\}.$$

Las funciones más interesantes de la Matemática Aplicada no son las funciones de una única variable, sino las de varias variables.

Definición 3.

- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en la recta real,*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} & & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & y, \end{array}$$

la llamaremos función real de varias variables reales, $x_1, ..., x_n$. También se le llama Campo Escalar y algunas veces potencial.

- *Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m & & \\ & & \overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) & \to & f(\overrightarrow{x}) & = & \overrightarrow{y} = (y_1, ..., y_m), \end{array}$$

la llamaremos función vectorial de varias variables reales, $x_1, ..., x_n$. También se le llama Campo Vectorial.

En Física los campos vienen dados por potenciales. Y las fuerzas que en ellos aparecen se representan por campos vectoriales.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que un problema con una función de n-variables, cálculo de derivadas o integrales...etc, se suele reducir a resolver n problemas de una única variable. Por ello antes de estudiar funciones con más variables es conveniente saber bastante sobre funciones de una variable.

Ejemplos. Las funciones en matemáticas vienen dadas usualmente por fórmulas. Por ejemplo.

Ejemplos 2.

- ***Función constante.*** *Fijemos $a \in \mathbb{R}$, se define la función constantemente igual al valor a por*

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & f(x) & = & a. \end{array}$$

- ***Función identidad.*** *La función*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = x, \end{array}$$

que a cada x le hace corresponder a él mismo, se le llama función identidad.

Estos ejemplos son muy sencillos, aún así muchas otras funciones se construyen a partir de ellos.

TIPOS DE APLICACIONES.

De forma general, podemos observar las siguientes propidades de las aplicaciones.

Definición 4. *Dada una aplicación $f : A \to B$ se dice que es:*

inyectiva: *si para $x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y)$, entonces necesariamente $x = y$.*

suprayectiva: *si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ de modo que $f(a) = b$. O equivalentemente si $Imf = B$.*

biyectiva: *si es inyectiva y suprayectiva a la vez.*

Ejemplo 1. $\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = x^2 \end{array}$ *no es ni inyectiva ni suprayectiva.*

Demostración: Como $f(x) = f(-x)$ no puede ser inyectiva. Como $Imf = \{x \geq 0\} \neq \mathbb{R}$ no puede ser suprayectiva $\square$

Observación 2. *Dada una aplicación $f : A \to B$, probar que es suprayectiva es equivalente a probar que la ecuación*

$$f(x) = b$$

tiene solución para todo $b \in B$. Probar que es inyectiva es equivalente a probar que la ecuación anterior tiene a lo más una única solución.

Notación: Dada una aplicación $f : A \to B$ y $C \subseteq A$ escribimos:

- $f_{|C}$ como la la función f restringida al subconjunto C

$$f : C \to B.$$

- $f(c) = \{b \in B \ : \ \exists a \in C \text{ tal que } f(a) = b\} = \{f(a) \ : \ a \in C\}$.

Ahora si $D \subseteq B$ escribimos

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \ : \ f(a) \in D\}.$$

Proposición 1. *Dados una aplicación $f : A \to B$ y $A_1, A_2 \subseteq A$, entonces*

a: $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b: *En general no es cierto que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Si f es inyectiva si se tiene la igualdad.*

Demostración: Ejercicio.

Proposición 2. *Dados una aplicación $f : A \to B$ y $B_1, B_2 \subseteq B$, entonces*

a: $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
b: $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Demostración: Ejercicio.

La notación anterior no hay que confundirla con la **función inversa**, cuando esta exista.

Definición 5. *Dada una aplicación inyectiva $f : A \to B$ se define su **función inversa** por*

$$f^{-1} : Imf \subseteq B \to A$$

tal que para todo $b \in Imf$ se tiene que $f^{-1}(b) = a$ donde $a \in A$ es el único elemento de A de modo que $f(a) = b$.

La definición anterior tiene sentido solo para funciones inyectivas, pues en este caso el a de la definición está univocamente determinado.

Definición 6. *Dadados A, B y C tres conjuntos y dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de modo que $Imf \subseteq Domg$, se define la apliación f compuesta con g (la aplicación **composición**) por*

$$\begin{array}{ccccccc} g \circ f & : & A & \to & C & & \\ & & a & \to & g \circ f(a) & = & g\,(f(a)\,). \end{array}$$

CARDINALIDAD:

Vamos a definir el concepto de **Cardinalidad** o cantidad de elementos de un conjunto. En el caso de los llamados cardinales finitos todo es muy intuitivo. El problema llega al tratar la noción de conjunto infinito (dada por Cantor). Aún más, distinguir entre los distintos infinitos que existen.

Entender la cardinalidad del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ nos ayudará a entender lo relativo a sucesiones de números reales.

Definición 7. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que son **equipotentes** o que tiene el mismo **cardinal** si existe una biyección f entre ellos*

$$f : A \to B, \qquad f \text{ biyección.}$$

Escribimos $A \sim B$.

Proposición 3. *La propiedad de equipotencia entre conjuntos tiene las propiedades de las relaciones de orden.*

Demostración:

reflexiva: Dado A conjunto, éste es equipotente con él mismo:

$$I : A \to A,$$

la aplicación identidad ($I(a) = a$) es una biyección de A en si mismo.

simétrica: Si $f : A \to B$ es una biyección, entonces $f^{-1} : B \to A$ es otra biyección (¡compruébalo!).

transitiva: Si $A \sim B$ y $B \sim C$, tenmos que ver que $A \sim C$. Como existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyecciones, entonces la composición $g \circ f : A \to C$ es otra biyección (¡compruébalo!) $\square$

Definición 8. *Se define el* ***cardinal*** *de un conjunto a la clase de equivalencia a la que pertenece teniendo en cuenta la relación de equipotencia. Si A es un conjunto, notamos por $CardA$ (o también $|A|$) al cardinal de A.*

Definición 9. *Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A es menor o igual que B ($Carda \leq CardB$ si y solo si existe $f : A \to B$ aplicación inyectiva.*

Proposición 4. *La relación de ser menor o igual entre cardinales tiene las propiedades de una relación de orden.*

Demostración:

reflexiva: Dado A conjunto, entonces $CardA \leq CardA$:

$$I : A \to A,$$

la aplicación identidad ($I(a) = a$) es una biyección de A en si mismo.

antisimétrica: Si $f : A \to B$ es una inyección y $g : B \to A$ es otra inyección, el **Teorema de Cantor-Bernstein**(no es muy difícil de probar) nos dice que existe una biyección $h : A \to B$. Por tanto $CardA = CardB$.

transitiva: Si $CardA \leq CardB$ y $CardB \leq CardC$, tenemos que ver que $CardA \leq CardC$. Como existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones inyectivas, entonces la composición $g \circ f : A \to C$ es otra inyección (¡compruébalo!) $\square$

Teorema 1. *Dados dos conjuntos A y B, entonces o bien $CardA \leq CardB$ o bien $CardB \leq CardA$. Por tanto la relación "$\leq$" entre cardinales define un orden total.*

Demostración: La prueba es bastante difícil $\square$

Proposición 5. *Sea X un conjunto y consideramos el conjunto de sus partes*

$$P(X) = \{\, A \ : \ A \subseteq X \,\}.$$

Se verifica que

$$CardX < CardP(x).$$

Demostración: La aplicación

$$\begin{array}{rcccccc} J & : & X & \to & P(X) & & \\ & & x & \to & J(x) & = & \{x\} \end{array}$$

es claramente inyectiva y por tanto $CardX \leq CardP(x)$. Para descartar la igualdad de cardinales, supongamos que

$$f : X \to P(x)$$

es una biyección. Se considera el subconjunto de X

$$Z = \{\, x \in X \ : \ x \notin f(x) \,\}.$$

Puede ocurrir que:

- $Z = \emptyset$, en ese caso para todo $x \in X$, se tiene que $x \in f(x)$. Luego $f(x) \neq \emptyset$ para todo x, luego f no es una biyección.
- $Z \neq \emptyset$, en ese caso por ser f biyectiva existe $a \in X$ de modo que $f(a) = Z$. Ahora
  - si $a \in Z$, se tiene que $a \notin f(a) = Z$. Lo cual es contradictorio.
  - si $a \notin Z$, entonces $a \in f(a) = Z$. Lo cuál vuelve a ser contradictorio.

Vemos que no puede existir tal biyección f $\square$

La Proposición anterior parece claro para "conjuntos finitos". No parece tal claro para conjuntos como $\mathbb{N}$, donde podemos encontrar biyecciones como

$$\begin{array}{rcccccc} \sigma & : & \mathbb{N} & \to & \{\text{pares}\} & & \\ & & n & \to & \sigma(n) & = & 2n. \end{array}$$

donde $\{\text{pares}\} \subsetneq \mathbb{N}$.

Las siguientes definiciones aclaran un poco la situación.

Definición 10. **a:** *Un conjunto A es un **conjunto finito** (decimos que su cardinal es finito) si no es equipotente a ninguno de sus subconjuntos propios (e.d. no existe $A' \subsetneq A$ de modo que existe una biyección $f : A' \to A$.*

b: *Un conjunto A es un* ***conjunto infinito*** *(decimos que tiene cardinal infinito) si es equipotente a algún subconjunto suyo propio (e.d. existe $A' \subsetneq A$ de modo que existe una biyección $f : A' \to A$.*

Ejemplo 2. *El conjunto de la números naturale $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.*

Ejemplo 3. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccccc} f & : & (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2 & si \quad x \in (0,1/2) \\ \\ \frac{1}{x-1} + 2 & si \quad x \in [1/2,1) \end{cases} \end{array}$$

es una biyección del intervalo $(0,1)$ en todo $\mathbb{R}$ (¡compruébalo!).

Proposición 6. **a:** *Si X es finito y $Y \subseteq X$, entonces Y es finito.*
b: *Si X es finito y $Y \sim X$, entonces Y es finito.*
c: *Si X es infinito y $Y \sim X$, entonces Y es infinito.*

Demostración: Ejercicio.

Proposición 7. *Si X es finito y Y es infinito, entonces $CardX < CardY$.*

Demostración: Si suponemos que $CardY \leq CardX$, entonces existe una aplicación $f : Y \to X$ inyectiva. Ahora, $f(Y) \subseteq X$, por tanto $f(Y)$ es finito por la proposición anterior. Como $f : Y \to f(Y)$ es una biyección, la Proposición anterior nos dice que Y es finito. Llegamos a contadiccción. Como los cardinales están totalmente ordenados, concluimos que $CardX < CardY$ $\square$

Proposición 8. *Si $CardA = CardB = Card\mathbb{N}$, entonces*
a: *$Card(A \cup B = Card\mathbb{N}$.*
b: *$Card(A \times B) = Card\mathbb{N}$.*

Demostración: Ejercicio.

Proposición 9. *Si A es infinito, entonces $Card\mathbb{N} \leq CardA$.*

Demostración: Por ser A infinito,

$A \neq \emptyset$, así existe $a_1 \in A$, ponemos $f(1) = a_1$;

$A \backslash \{a_1\} \neq \emptyset$, así existe $a_2 \in A \backslash \{a_1\}$, ponemos $f(2) = a_2$....etc

Construidos $f(1) = a_1, ..., f(n) = a_n$ distintos,

$A \backslash \{a_1, ..., a_n\} \neq \emptyset$, así existe $a_{n+1} \in A \backslash \{a_1, ..., a_n\}$, ponemos $f(n+1) = a_{n+1}$.

Así se construye una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en A $\square$

Observación 3. *El resultado anterior nos dice que el cardinal de* $\mathbb{N}$ *es el primer cardinal infinito.*

Observación 4. *Como* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *y por lo visto arriba se tiene que* $Card\mathbb{N} = Card\mathbb{Z} = Card\mathbb{Q}$.

Más adelante veremos que $Card\mathbb{N} < Card\mathbb{R} = Card\mathbb{C}$.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`