## ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

## EL BINOMIO DE NEWTON.

### NÚMEROS COMBINATORIOS.

Se definen los **números combinatorios** de la siguiente manera.

**Definición. 1.** *Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ definimos el número combinatorio "$n$"sobre "$k$"por*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)....(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

*además escribimos*

$$\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 \qquad y \qquad \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Veamos algunas propiedades de estos números antes de ver algunas de sus aplicaciones.

**Proposición. 1.** *Para $n, k$, con $n \geq k$ se tiene que*

**a:** $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$

**b:** $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$

**c:** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

**Demostración:**

**a:** $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)....(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)....(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)....(n-k+2)[k+(n-k+1)]}{k!} = \frac{(n+1)n(n-1)....((n+1)-k+1)}{k!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$.

**b:** Es claro que $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$.

**c:** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ $\square$

Una aplicación es la siguiente.

**Proposición. 2.** *Dado un cojunto $S$ de $n \in \mathbb{N}$ elementos, el número de subsonjuntos distintos de $S$ de $k$ elementos es precisamente $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$*

**Demostración:** La prueba se hace por inducción sobre $n$. Es claro que si $n = 1$ o $n = 2$ el resultado es cierto. Para $n > 2$ los subconjuntos de $S$ de cero elementos son solo $1 = \binom{n}{0}$ y los de un solo elemento son $n = \binom{n}{1}$. Supongamos que para $n-1$ hay $\binom{n-1}{k}$ subconjuntos distintos de $k$ elementos. Entonces dado un elemento $a \in S$ los subconjuntos distintos de $S$ de $k+1$ elementos se dividen entre los que no contiene al elemento $a$, de estos hay $\binom{n-1}{k+1}$; y los que si contiene al elemento $a$, estos son $\binom{n-1}{k}$. En total

$$\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

donde la igualdad se tiene por **a)** de la Proposición anterior $\square$

**EL BINOMIO DE NEWTON.**

La siguiente fórmula se conoce como Binomio de Newton. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

La prueba sirve para $x, y \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo; es decir un conjunto con una suma y producto con las propiedades de $\mathbb{R}$ como por ejemplo: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ y $Z_p$ con $p$ primo.

**Demostración:** La prueba la vemos por inducción sobre $n$. Para $n = 1$

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x y^0 + \binom{1}{1} x^0 y.$$

Supuesto cierto el resultado para $n$, entonces

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) =$$

usando la hipótesis de inducción y la propiedad distributiva de las operaciones

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) x + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right) y =$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} =$$

usando las propiedades de los números combinatorios

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \qquad \square$$

Una regla sencilla para calcular números combinatorios, al menos para $n$ no muy alto, es el Triángulo de Tartaglia.

$$\begin{array}{c} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ \vdots \\ \text{etc} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \cdots & & & & \end{array}.$$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*Email address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`