ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONTINUIDAD UNIFORME.

El concepto de **continuidad uniforme** es una condición más fuerte que la continuidad. Aunque teórico, es muy útil en resultados sobre integrabilidad. Es una característica de las funciones que queda escondida en las demostraciones de los teoremas, pero sin ella algunos resultados importantes no podrían ser demostrados. Como por ejemplo que una función continua definida en un intervalo cerrado es integrable.

Vamos a ver la definición y alguna caracterización por si fuera necesaria en el futuro.

Definición. 1. *Sea una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es* ***uniformemente continua*** *en el conjunto A si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in A$ y*

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Observación. 1.

- *La continuidad uniforme se define sobre todo un conjunto, no punto a punto como en el caso de la continuidad. Así que aunque formalmente se parecen mucho las dos definiciones, ésta de la continuidad uniforme se establece sobre todos los elemento de un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$.*
- *Es un sencillo ejercicio probar que si A es un intervalo abierto de la recta, entonces la continuidad uniforme sobre A implica la continuidad sobre cada elemento del conjunto A.*

Al contrario.

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua sobre todos los elementos del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

Demostración: En este resultado se puede reemplazar el intervalo $[a, b]$ por un conjunto compacto K de la recta; lo que vamos a usar en la prueba es la cracterización de compactos por sucesiones (mira el Apéndice correspondiente).

Supongamos que f **no** es uniformemente continua. Entonces podemos encontrar un $\epsilon > 0$ de modo que para todo $\frac{1}{n}$ existen $x_n, y_n \in [a, b]$ verificando

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon.$$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass podemos encontrar dos subsucesiones (primero una y de ésta sacamos la segunda) de modo que

$$x_{n_k} \quad \to_{k\to\infty} \quad x$$

$$y_{n_{k_j}} \quad \to_{j\to\infty} \quad y.$$

Es claro que $x_{n_{k_j}} \to_{j\to\infty} x$ y que $x, y \in [a, b]$ (ya que el intervalo es cerrado). También $x = y$.

$$0 \leq |x - y| \leq |x - x_{n_{k_j}}| + |x_{n_{k_j}} - y_{n_{k_j}}| + |y_{n_{k_j}} - y| \leq$$

$$|x - x_{n_{k_j}}| + \frac{1}{n_{k_j}} + |y_{n_{k_j}} - y| \to_{j\infty} 0.$$

Ahora de la continuidad de f se tiene que

$$f(x_{n_{k_j}}) \quad \to_{j\to\infty} \quad f(x)x$$

$$f(y_{n_{k_j}}) \quad \to_{j\to\infty} \quad f(y) = f(x),$$

lo cuál es incompatible con que

$$|f(x_{n_{k_j}}) - f(y_{n_{k_j}})| > \epsilon \qquad \text{para toda} \qquad j = 1, 2, ... \qquad \square$$

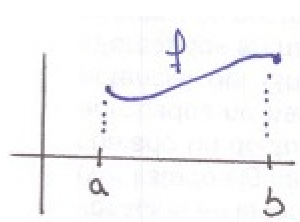

FIGURA 1. Función uniformemente continua.

Ejemplos. 1. *Las siguiente funciones no son uniformemente continuas en los dominios que se indican. Observemos que dichos dominios no son intervalos cerrados.*

- $f(x) = \frac{1}{x}$, *para* $x \in (0, 1]$.
- $f(x) = x^2$ *para* $x > 1$.

Demostración: En ambos casos las funciones son continuas en sus respectivos dominios. Sin embargo

- Dado $0 < \epsilon < 1$, para cualquier $\delta > 0$, como $\frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$, podemos encontrar un $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} < \delta$ con $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{m})| = |n - m| \geq 1$.

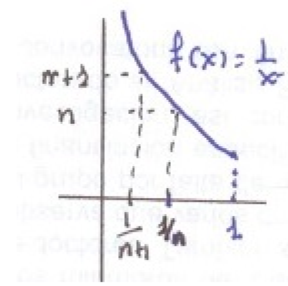

FIGURA 2. Función **no** uniformemente continua.

- Sea $x > 1$ y cualquier $\delta > 0$, entonces

$$|f(x) - f(x+\delta)| = |x^2 - (x^2 + 2\delta x + \delta^2)| \geq 2x\delta \to_{x\to\infty} \infty.$$

  Luego x^2 no puede ser uniformemente continua en $(1, \infty)$

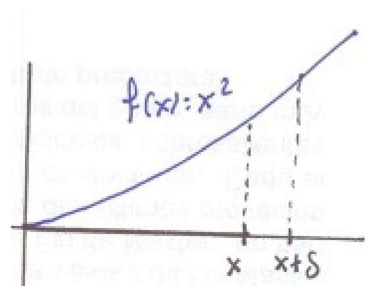

FIGURA 3. Función **no** uniformemente continua.

□

Un ejemplo importante de funciones uniformemente continuas lo forman las llamadas **funciones Lipschitzianas**.

Definición. 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **Lipschitz** (o que cumple la condición de Lipschitz) si existe $K > 0$ de modo que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in A.$$

Proposición. 1. *Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz, entonces es uniformemente continua en A*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, se toma $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Así para todo $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ se sigue que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = \epsilon$$

□

Observación. 2.

- *Más adelante veremos que las funciones con derivada continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ son Lipschitz.*
- *Las aplicaciones Lipschitz con constante $K < 1$ son importantes en los* ***Teoremas de Punto Fijo*** *(tanto de Banach como de Picard).*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es