ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Las funciones reales de variable real pueden tener formas sorprendentes. Vamos a ver algunos ejemplos algo "raros" antes de buscar regularidades en las funciones. Eso nos llevará a describir un catálogo de propiedades más o menos comunes que más adelante estudiaremos con más profundidad.

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Ejemplos. 1. *Algunos ejemplos de funciones.*

- $$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \end{array}$$

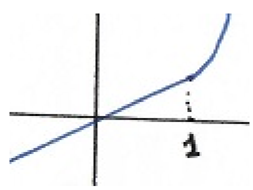

FIGURA 1

- $$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \to & |x| & = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$$

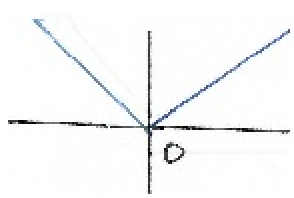

FIGURA 2

- $$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ & & x & \to \quad f(x) \quad = \quad \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \in) -3, -2) \\ -x-2 & \text{si} \quad x \in [-2, 0) \\ x+2 & \text{si} \quad x \in [0, 1) \end{cases} \end{array}$$

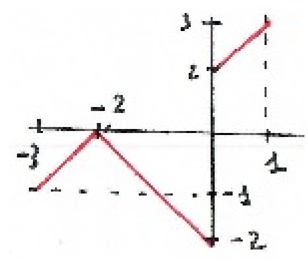

FIGURA 3

- $$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ & & x & \to \quad f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 \leq x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \end{array}$$

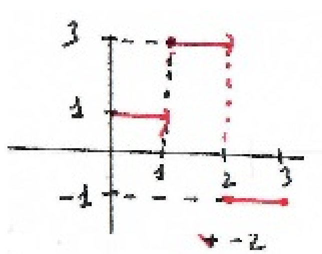

FIGURA 4

- La función de Dirichlet.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

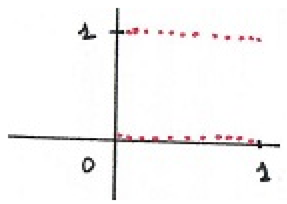

FIGURA 5

-

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si} \quad x = p/q \in [0,1] \text{ irreducible} \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

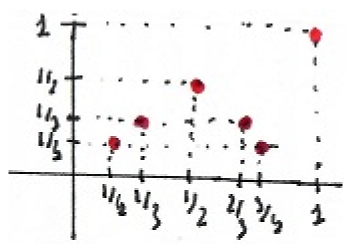

FIGURA 6

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES.

Las funciones como aplicaciones pueden ser inyectivas, suprayectivas o biyectivas; o nada de lo anterior (mira en teoría Conjuntos y Aplicaciones).

Definición. 1. *Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es*

Par: *si para todo $x \in Dom f$ se tiene que $-x \in Dom f$ y además $f(-x) = f(x)$.*

Impar: *si para todo $x \in Dom f$ se tiene que $-x \in Dom f$ y además $f(-x) = -f(x)$.*

Ejemplos. 2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *es una función par. La función* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *es impar.*

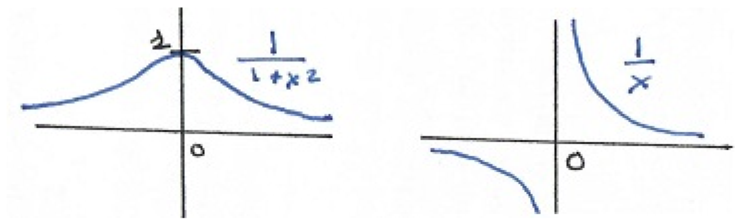

FIGURA 7

Definición. 2. *Se llaman raíces de una función f a los elementos $x \in Domf$ de modo que $f(x) = 0$.*

Ejemplos. 3.
- *La función $f(x) = x^2+4x+3$ tiene dos raíces $\{-3, -1\}$.*
- *La función $g(x) = (x+1)^2$ tiene una única raíz $x = -1$.*
- *La función $h(x) = 1 + |x|$ no tiene nínguno raíz.*

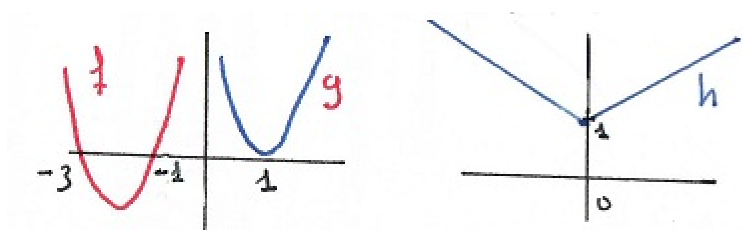

FIGURA 8

Observación. 1. *Para estudiar la gráfica de una función se pueden considerar los puntos de corte de la gráfica con las lineas de nivel $y = cte$. Así dado $a \in \mathbb{R}$ se puede ver como corta la gráfica de f a la recta $y = a$.*

Monotonía.

Definición. 3. *Se dice que una función f es **monótona creciente** si para todo $x, y \in Domf$ con $x \le y$ se verifica que*

$$f(x) \le f(y).$$

Se dice que es estrictamente monótona creciente si $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$.

Ejemplos. 4. *Las funciones $f(x) = a$ (constante) para $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \ge 0$ (si $x < y$ implica $\sqrt{x} < \sqrt{y}$) son ejemplos de funciones crecientes.*

FIGURA 9

Definición. 4. *Se dice que una función f es* ***monótona decreciente*** *si para todo $x, y \in Dom f$ con $x \leq y$ se verifica que*

$$f(x) \geq f(y).$$

Se dice que es estrictamente monótona decreciente si $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$.

Ejemplos. 5. *Como para $0 < x < y$ se tiene que $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, se tiene que las funciones $f(x) = \begin{cases} 1/x & si \quad 0 < x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x \geq 0$ son ejemplos de funciones decrecientes.*

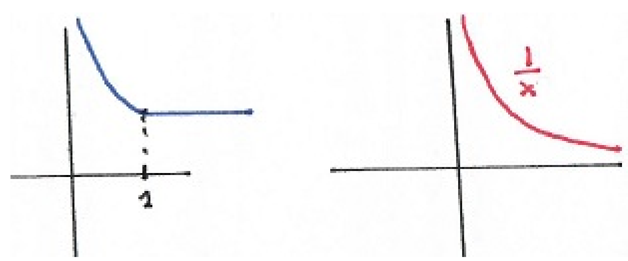

FIGURA 10

Convexidad.

Para entender las siguientes definiciones de convexidad y concavidad damos el siguiente Lema.

Lema. 1. *Dados $a; b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se consideran los conjuntos $[a, b]$ (intervalo cerrado) y*

$$A = \{\, x = \alpha a + (1 - \alpha) b \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \in [0, 1] \,\}.$$

Se verifica que

$$[a, b] = A.$$

Demostración: *Claramente para $\alpha = 0$, se tiene que $b \in A \cap [a,b]$ y para $\alpha = 1$, se tiene que $a \in A \cap [a,b]$. Ahora si $0 < \alpha < 1$ se sigue que*

$$a = \alpha a + (1-\alpha)a < \alpha a + (1-\alpha)b < \alpha b + (1-\alpha)b = b.$$

Lo que prueba que $A \subseteq [a,b]$.

Por otro lado, si $a < x < b$, se considera $0 < \alpha = \dfrac{x-b}{a-b} < 1$ y tenemos que

$$\frac{x-b}{a-b}a + (1 - \frac{x-b}{a-b})b = \frac{1}{a-b}[xa - ba + ab - xb] = x\frac{a-b}{a-b} = x.$$

Por tanto $x \in A$ y se sigue que $[a,b] \subseteq A$ $\square$

Definición. 5. *Una función f definida en un intervalo de la recta $I \subseteq \mathbb{R}$ se dice **convexa** si para todo $a, b \in I$, con $a < b$, y para todo $\alpha \in (0,1)$ se tiene que*

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

De forma gráfica, teniendo en cuenta el Lema anterior, la recta que une los puntos de la gráfica de f $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f.

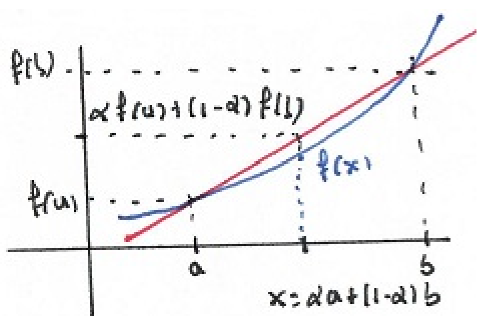

FIGURA 11

Definición. 6. *Una función f definida en un intervalo de la recta $I \subseteq \mathbb{R}$ se dice **concava** si para todo $a, b \in I$, con $a < b$, y para todo $\alpha \in (0,1)$ se tiene que*

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \geq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

De forma gráfica, teniendo en cuenta el Lema anterior, la recta que une los puntos de la gráfica de f $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por debajo de la gráfica de f.

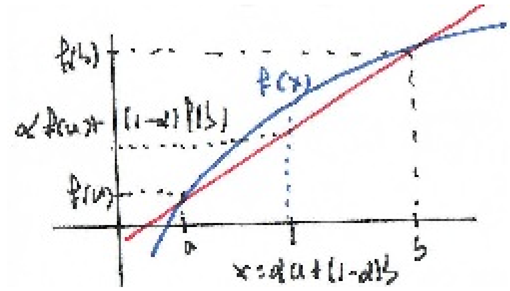

FIGURA 12

Ejemplos. 6. *La función $f(x) = x^2$ es convexa en todo $\mathbb{R}$ y la función $f(x) = \sqrt{x}$ es concava en $I = [0, \infty)$.*

Demostración: Tenemos que ver que

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) = (\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \leq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2.$$

Ahora

$$\alpha^2 a^2 + 2\alpha(1-\alpha)ab + (1-\alpha)^2 b^2 \leq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2$$

es equivalente a

$$\alpha(\alpha-1)a^2 + (-\alpha)(1-\alpha)b^2 \leq -2\alpha(1-\alpha)ab$$

equivalente a

$$\alpha(\alpha-1)[a^2 - 2ab + b^2] = \alpha(\alpha-1)(a-b)^2 \leq 0.$$

dado que esta última desigualdad es cierta, también lo es la de arriba. Esto prueba que $f(x) = x^2$ es convexa.

Queda como ejercicio (se procede de forma análoga) ver que $f(x) = \sqrt{x}$ es concava $\square$

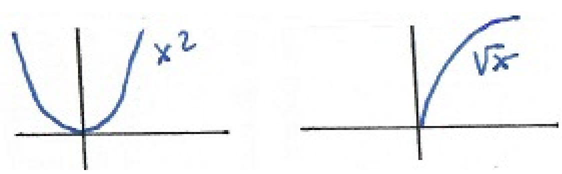

FIGURA 13

Ejemplo. 1. *En Economía se habla de* ***funciones de utilidad*** *; funciones que miden el gusto, la preferencia o el deseo de un producto o servicio. Estas funciones suelen ser creciente (se desea siempre más) y concavas (a mayor cantidad empieza el artazgo).*

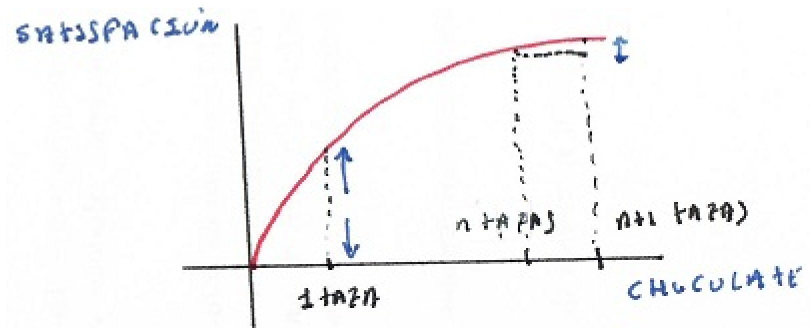

Figura 14

Más adelante veremos técnicas más sofisticadas (la derivada) para decidir sobre la monotonía o convexidad de una función.

Acotación.

Definición. 7. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que está:*

acotada superiormente: *si existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$f(x) \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x \in Dom f.$$

acotada inferiormente: *si existe $m \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$m \leq f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in Dom f.$$

acotada: *si esta acotada inferior y superiormente.*

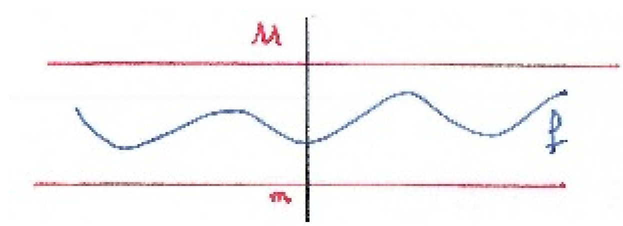

Figura 15. Función acotada.

Ejemplos. 7.

- *Para $f(x) = x^2$, se tiene que $0 \leq x^2$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ ocurre que $n^2 \geq n$, luego f está acotada inferiormente, pero no lo está superiormente.*
- *Para $f(x) = x^2$, con $x \in [2, 3]$, se tiene que $4 \leq x^2 \leq 9$ para todo $x \in [2, 3]$, luego f está acotada.*
- *Para $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, se tiene que $0 \leq f(x) \leq 1$, luego f está acotada.*

- *Para* $f(x) = -x^2$ *se tiene que está acotada superiormente ya que* $-x^2 \leq 0$, *no está acotada inferiormente.*

Ejercicio. 1. *Prueba que dada una función son equivalentes:*

a: *f está acotada.*

b: *Existe $M > 0$ de modo que*

$$|f(x)| \leq M \qquad \textit{para todo} \qquad x \in Dom f.$$

Observación. 2. *Dada una función f acotada existen:*

$$M = \sup f = \sup\{ f(x) \ : \ x \in Dom f \}.$$

y

$$m = \inf f = \inf\{ f(x) \ : \ x \in Dom f \}.$$

Ejemplo. 2. *La función* $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{x}{x^2 + 1}$ *está acotada.*

Demostración:

- Si $x \geq 0$, como $0 \leq \frac{x}{x^2+1} < 1$, se tiene que
$$0 \leq f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 1} \leq 1.$$
- Si $x < 0$, como $-\frac{x}{x^2+1} \geq 0$ y $|-\frac{x}{x^2+1}| = -\frac{x}{x^2+1} \leq 1$ se tiene que
$$1 \leq f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 1} \leq 2 \qquad \square$$

De forma gráfica:

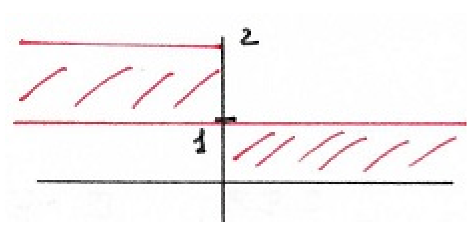

FIGURA 16

Definición. 8. *Decimos que f tiene un **máximo** en $x_0 \in Dom f$ si*

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in Dom f.$$

Definición. 9. *Decimos que f tiene un **mínimo** en $x_0 \in Dom f$ si*

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \textit{para todo} \qquad x \in Dom f.$$

Ejemplos. 8.

- *Para* $f(x) = x^2$, *con* $x \in [0,2]$, *como*
$$0 = f(0) \leq x^2 \leq f(2) = 4,$$
f *tiene un máximo en* $x = 2$ *y un mínimo en* $x = 0$.

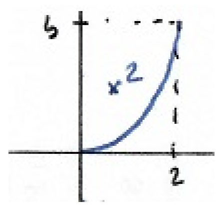

FIGURA 17

- *Para* $f(x) = \frac{1}{x}$, *con* $x > 0$, *observemos que para todo* $0 < a < b$ *si tomamos* $0 < x < a < b < y$ *tenemos que*
$$0 < 1/y < 1/b < 1/a < 1/x,$$
luego f *no tiene ningún punto de máximo ni de mínimo.*
- $0 < f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$. *Está función tiene un máximo en* $x = 0$, *pero no tiene ningún mínimo.*

Ejemplo. 3. *Se considera la función*
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \textit{si} \quad x \in (0,2) \\ x^2 & \textit{si} \quad x \in [2,3) \\ -8(x-3)+9 & \textit{si} \quad x \in [3,4). \end{cases}$$

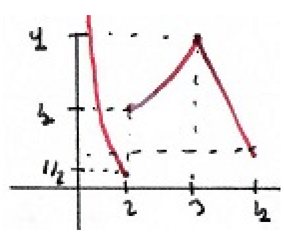

FIGURA 18

De esta función se puede decir que:

- f está acotada inferiormente, pero no superiormente.
- f tiene un máximo en $[2,4]$ en en $x = 3$, pero no en todo su dominio.
- f es convexa en $(0,2)$, pero no lo es en $(0,4]$.
- f no tiene raíces, ni es par ni impar.

- f decrece o crece según los intervalos.

Observación. 3. *Las propiedades de una función dependen del dominio considerado. Es más, como en el caso de los límites que vemos a continuación son propiedades puntuales.*

Límites de una función.

Los límites de una función, si existen, nos indican el comportamiento de una función "cerca" de un punto o en los "extremos" del dominio de la misma. Hay todo una variedad de estos límites que vamos a describir siempre y cuando existan.

Ejemplos. 9. *Lo anterior de forma gráfica:*

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$

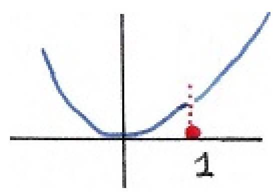

Figura 19

- *Consideramos las funciones* $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^2$ *y* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

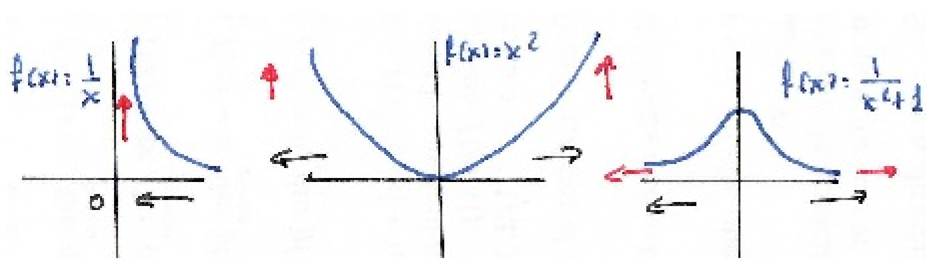

Figura 20

De forma precisa.

Definición. 10. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in Dom f$ *de modo existe* $r > 0$ *tal que*

$$(x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\} \subseteq Dom f.$$

Entonces

a: *se dice que el **límite** de f en x_0 es $b \in \mathbb{R}$ y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - b| \leq \epsilon;$$

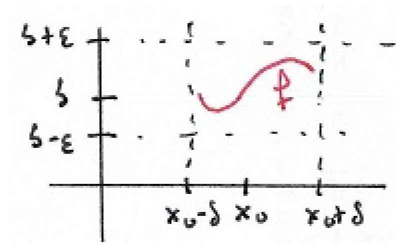

FIGURA 21

b: *se dice que el **límite** de f en x_0 es infinito y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

si y solo si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$f(x) > M;$$

c: *se dice que el **límite** de f en x_0 es menos infinito y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

si y solo si para todo $M < 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$f(x) < M;$$

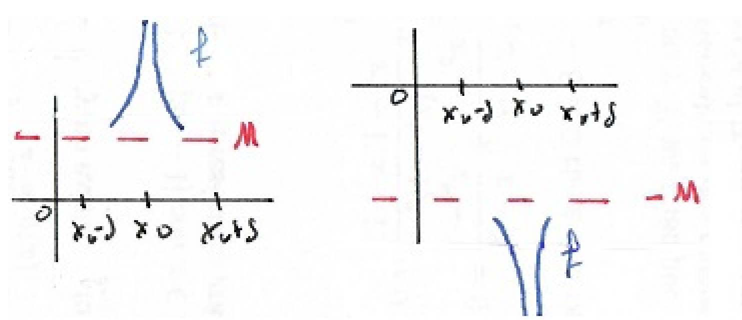

FIGURA 22

Ejemplos. 10.
- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

- *Si* $f(x) = \begin{cases} 1/|x| & si \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$
- *Si* $f(x) = \begin{cases} -1/|x| & si \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

Demostración:

- Obeservemos que $|x^2 - 4| \leq |x-2||x+2| < 6|x-2| < \epsilon$ lo cuál es cierto siempre que $|x-2| < min\{2, \frac{\epsilon}{6}\} = \delta$.
- Para $M > 0$, existe x_0 tal que $|x_0| < 1/M$, luego para todo $|x| < |x_0| = \delta$ se tiene que
$$\frac{1}{|x|} > \frac{1}{|x_0|} > M.$$
- De forma análoga al anterior $\square$

Más adelante cuando estudiemos límites hablaremos de **límites por laterales** por la derecha y la izquierda.

Límites en el infinito.

Para ver la tendencia de una función en los extremos de la recta real tenemos los siguientes límites.

Definición. 11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que para cierto a se tiene que $(a, \infty) \subseteq Dom f$, entonces*

a: *se dice que el **límite** de f en el infinito es $b \in \mathbb{R}$ y escribimos*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$
si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ de modo que si $x > M$, entonces
$$|f(x) - b| \leq \epsilon;$$

b: *se dice que el **límite** de f en el infinito es infinito y escribimos*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
si y solo si para todo $M > 0$ existe $N > 0$ de modo que si $x > N$, entonces
$$f(x) > M;$$

c: *se dice que el **límite** de f en el infinito es menos infinito y escribimos*
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para todo $M < 0$ existe $N > 0$ de modo que si $x > N$, entonces

$$f(x) < M;$$

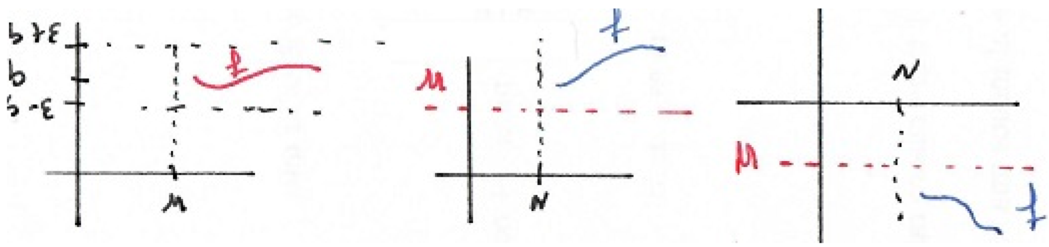

FIGURA 23

Ejemplos. 11.

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.
- $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$.

Demostración: Veamos que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$. Sea $M > 0$ y tomamos $N = \sqrt[3]{M}$, entonces si $x > \sqrt[3]{M}$ se tiene que

$$x^3 > M \qquad \square$$

De forma similar se definen los límites en el menos infinito.

Definición. 12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que para cierto b se tiene que $(-\infty, b) \subseteq Dom f$, entonces*

a: *se dice que el **límite** de f en el menos infinito es $b \in \mathbb{R}$ y escribimos*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $M < 0$ de modo que si $x < M$, entonces

$$|f(x) - b| \leq \epsilon;$$

b: *se dice que el **límite** de f en el menos infinito es infinito y escribimos*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

si y solo si para todo $M > 0$ existe $N < 0$ de modo que si $x < N$, entonces

$$f(x) > M;$$

c: *se dice que el **límite** de f en el menos infinito es menos infinito y escribimos*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para todo $M < 0$ existe $N < 0$ de modo que si $x < N$, entonces

$$f(x) < M;$$

Ejercicio. 2. *Dibuja las situaciones que son descritas en la definición anterior.*

Ejemplos. 12.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty.$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$

Continuidad.

La continuidad es una propiedad local de las funciones ligada al concepto de límite.

Definición. 13. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que para $x_0 \in Domf$ existe $r > 0$ para el cuál*

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq Domf.$$

*Se dice que f es **continua** en x_0 si y solo si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y este límite toma el valor*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

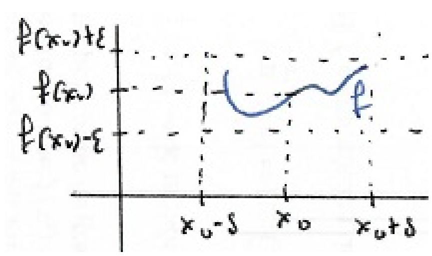

FIGURA 24

Se dice que f es continua en una parte de su dominio $A \subseteq Domf$ si f es continua en todo $x \in A$.

Esta propiedad es la que nos permite pintar las gráficas de las funciones sin "levantar la punta del lápiz del papel" (Teorema de Bolzano, que veremos en su momento).

Ejemplos. 13.

- *$f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$.*
- $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < x < 3 \end{cases}$ *No es continua en $x = 2$.*

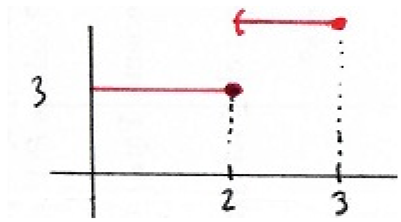

Figura 25

- *La función de Dirichtle $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ no es continua en nigún punto de su dominio.*

Demostración:

- Observemos que $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$. Ahora el fácil ver que $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$.
- Cerca de $x = 2$ la función vale tanto 3 como 4 luego **no** existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.
- Lo veremos un poco más adelante $\square$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`