ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CARDINAL DE $\mathbb{R}$.

Con la representación decimal de los números reales estamos en condiciones de explorar el cardinal de los números reales.

Observación. 1. *El intervalo* $(0,1)$ *tiene le mismo cardinal que todo* $\mathbb{R}$*.*

Demostración: Es fácil establecer una biyección entre el intervalo $(0,1)$ y $\mathbb{R}$. Por ejemplo

$$\begin{array}{ccccc} f & : & (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2 & \text{si} \quad x \in (0,1/2] \\ \\ 2 - \frac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \in (1/2,1) \end{cases} \end{array} \qquad \square$$

Ahora lo que vamos a ver es que no existe una biyección de $\mathbb{N}$ en $(0,1)$ y por tanto no existe una biyección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Proposición. 1. *No existe una biyección de* $\mathbb{N}$ *al intervalo* $(0,1)$*.*

Demostración: Supongamos que $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ es un aplicación. Así para cada $k\in\mathbb{N}$ se tendría que $f(k)=x_k\in(0,1)$. Usando la representación decimal

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{10^n}.$$

Ahora consideramos el número

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k},$$

donde $b_k = a_{k,k}+1$ si $a_{k,k}<9$ y $b_k=0$ si $a_{k,k}=9$. Es claro que $x\in(0,1)$ y que $f(k)\neq x$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Por tanto f no puede ser suprayectiva y claro tampoco biyectiva $\square$

Teorema. 1. $Card\mathbb{N} < Card\mathbb{R}$*.*

Demostración: Como $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$, se sigue de las propiedades de los cardinales que

$$Card\mathbb{N} \leq Card\mathbb{R}.$$

Como ambos conjuntos no pueden tener el mismo cardinal deducimos que

$$Card\mathbb{N} < Card\mathbb{R} \qquad \square$$

¿Puede existir un cardinal intermedio entre él de $\mathbb{N}$ y él de $\mathbb{R}$. Es una buena pregunta que hacer a los especialistas de Teoría de Conjuntos. Las matemáticas standar la resuelven con un axioma.

Axioma de la Potencia del Continuo: No existe un cardinal intermedio entre él de $\mathbb{N}$ y él de $\mathbb{R}$.

Corollary 0.1. *$Card\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = Card\mathbb{R}$.*

Demostración: Por el axioma de la Potencia del continuo $Card\mathbb{N} \leq Card\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \leq Card\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y el cardinal de $\mathbb{Q}$ es igual que él de $\mathbb{N}$, si $Card\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = Card\mathbb{N}$ se tendría que

$$Card\mathbb{R} = Card\mathbb{N}$$

lo cuál no es posible. Por tanto solo queda que

$$Card\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = Card\mathbb{R} \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`