ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SERIES.

En general, repetimos, no vamos a poder encontrar la suma de una serie convergente. Pero si su carácter, es decir si es convergente o no lo es. Para ello se tiene una colección de criterios que vamos a presentar a continuación. En general se basan en el criterio de comparación de series que ya hemos visto. Esta comparación solo se puede hacer con series del mismo signo, por lo que la mayoría de **criterios** que presentamos lo son para **series de términos positivos**.

En primer lugar observemos que una serie convergente, como sucesión convergente, lo es si es de Cauchy (Principio de Completitud de $\mathbb{R}$). En concreto.

Teorema. 1. ***Criterio de Cauchy:*** *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 de modo que si $m, n \geq n_0$ se tiene que*

$$|s_m - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \epsilon.$$

Comencemos ahora con los criterios de convergencia para series de términos positivos. Los siguientes son los que más aplicaciones tienen, sobre todo el **Criterio del Cociente** que veremos en más adelante.

Teorema. 2. ***Criterio de Condensación:*** *Sea $(a_n)_n$ una sucesión decreciente de términos positivos, $a_n > 0$ para todo n. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ es convergente.*

Demostración: $\Leftarrow$) Sean

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

y

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 2a_4 + ... + 2^k a_{2^k}.$$

Si $n < 2^k$, como la sucesión es decreciente

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + ... + (a_{2^k} + ... + a_{2^{k+1}-1}) \leq$$

$$a_1 + 2a_2 + 2^2 a_4 + ... + 2^k a_{2^k} = t_k.$$

Así si $(t_k)_t$ está acotada también lo está $(s_n)_n$.

$\Rightarrow$) Si $n > 2^k$, entonces

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2^{k-1}-1} + ... + a_{2^k}) \leq$$

por ser decreciente la sucesión (a_n)

$$\frac{1}{2} + a_2 + 2a_4 + ... + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k.$$

Así $2s_n \geq t_k$, luego si $(s_n)_n$ está acotada también lo está $(t_k)_k$ $\square$

Ejemplo. 1. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$*, con* $p > 1$*, es convergente.*

Demostración: Aplicamos el Criterio de condensación. Así

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{2^p})^k$$

es una serie geométrica convergente ya que $2/2^p < 1$ $\square$

Pasamos ahora a los criterios usuales de series de términos positivos. El primero es una reformulación del criterio de comparación.

Teorema. 3. ***(Criterio de Comparación por Cociente)****. Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos de modo que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0,$$

entonces

- *si una serie converge la otra también;*
- *equivalentemente, si una serie diverge la otra también.*

Demostración: Como $a_n, b_n \geq 0$, se tiene que $c > 0$. Tomemos $0 < \epsilon < \frac{c}{2}$, y recordando la definición de límite de una sucesión, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$|\frac{a_n}{b_n} - c| < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon$$

y por tanto

$$\frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2} b_n \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Luego

$$\frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{3c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ahora es claro que si una serie converge, como acota a la otra salvo una constante, esta otra también converge $\square$

Ejemplo. 2. *Se considera la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$. *Esta serie es de términos positivos y se parece a la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Ahora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n+1} = 1.$$

Luego como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es convergente, el criterio de comparación por cociente nos dice que nuestra serie también lo es.*

Teorema. 4. *(**Criterio del Cociente**). Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos de modo que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$$

Entonces

- *si* $\alpha < 1$, *la serie es convergente;*
- *si* $\alpha > 1$, *la serie es divergente;*
- *si* $\alpha = 1$, *el criterio no decide, es decir la serie en cuestión puede converger o no.*

Observemos que este criterio es intrinseco a la serie, no necesitamos de otras para compararla.

Demostración: Veamos el primer caso, el otro es análogo aunque la consecuencia es la contraria. Si $\alpha < 1$, podemos encontar $\alpha < r < 1$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \qquad \Rightarrow a_{n+1} < ra_n.$$

Así para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$a_n < ra_{n-1} < r^2 a_{n-2} < \ldots < r^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{N} r^{n-n_0} a_{n_0} = \sum_{k=0}^{N-n_0} r^k a_{n_0} \leq a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = a_{n_0} \frac{1}{1-r},$$

donde hemos usado la suma de la serie geométrica en la última igualdad.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos y sus sumas parciales están acotadas, concluimos que la serie converge $\square$

Ejemplos. 1.

- *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{3\times 6\times\cdots\times 3n}$, *la podemos escribir como*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{3\times 6\times\cdots\times 3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{3^n\times 1\times 2\times\cdots\times n}.$$
Aplicando el Criterio del Cociente
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)\times(2n+3)}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n+3)}{3^{n+1}(n+1)} = \frac{2}{3} < 1,$$
vemos que la serie converge.
- *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a$, *para cierto* $a > 0$ *va converger o no dependiendo del valor de* a. *Aplicanco el Criterio del Cociente*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)^a}{a^n n^a} = \lim_{n\to\infty} a(1+\frac{1}{n})^a = a.$$
Si $a < 1$ *la serie converge. Si* $a > 1$ *la serie diverge. Y si* $a = 1$, *en este caso la serie queda*
$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty,$$
luego la serie diverge.
- *La serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente y se tiene que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es convergente y se tiene que*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$
Los dos ejemplos anteriores muestran que cuando $\alpha = 1$, *el Criterio del Cociente no adivina el carácter de la serie en cuestión.*

Teorema. 5. ***Criterio de la Raíz:*** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos de modo que existe*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$
Entonces

- *si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *la serie es convergente;*
- *si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *la serie es divergente;*

- *si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, *el criterio no decide, es decir la serie en cuestión puede converger o no.*

Demostración: Esta prueba es muy parecida a la anterior. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < r < 1$, entonce para algún n_0 se tiene que

$$\sqrt[n]{a_n} < r \qquad \text{para todo} n \geq n_0.$$

Así

$$\sum_{n\geq n_0} a_n \leq \sum_{n\geq n_0} r^n.$$

Como la serie geométrica es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mayorada por la anterior, es también convergente.

El caso $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ es análogo con resultado diferente □

Ejemplos. 2.
- *Dada* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, *como*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to_{n\to\infty} 0$$

la serie converge.
- *Para* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *serie divergente, se tiene que*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

- *Para* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, *serie convergente, se tiene que*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

A veces, cuando no funciona el criterio del cociente, se emplea el siguiente método.

Teorema. 6. ***Criterio de Raabe:*** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos de modo que existe*

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \alpha.$$

Entonces

- *si* $\alpha > 1$, *la serie es convergente;*
- *si* $\alpha < 1$, *la serie es divergente;*

Demostración: Supongamos que $\alpha > r > 1$ y así para cierto n_0

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) > r \Leftrightarrow n(a_n - a_{n+1}) > na_n \qquad \text{para todo} \qquad n \geq n_0.$$

Por tanto, para $m < n$

$m(a_m - a_{m+1}) + (m+1)(a_{m+1} - a_{m+2}) + ... + n(a_n - a_{n+1}) > r(a_m + a_{m+1} + ... + a_n)$.

Operando

$$ma_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n - na_{n+1} > r(a_m + a_{m+1} + ... + a_n),$$

así

$$ma_m - na_{n+1} > (r-1)(a_{m+1} + ... + a_n) + ra_m,$$

y por tanto

$$a_{m+1} + ... + a_n < \frac{(m-r)a_m - na_{n+1}}{r-1} < \frac{(m-r)a_m}{r-1}.$$

Luego las sumas parciales están acotadas, para todo $n \geq n_0$

$$a_1 + ... + a_n \leq (a_1 + ... + a_{n_0} + \frac{n_0 - r}{r-1} a_{n_0}.$$

Al estar las sumas parciales acotadas, la serie converge.

El otro caso es análogo con resultado contrario $\square$

Ejemplo. 3. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(p+2).....(p+n)}{(q+1)(q+2).....(q+n)}$, *para* $p, q > 0$ *es divergente.*

Demostración: Es una serie de térnimos positivos. Si usamos el Criterio del Cociente, el límite da uno y el criterio no decide. Ahora

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{p+n+1}{q+n+1}) = 0 < 1,$$

el criterio anterior nos dice que la serie diverge $\square$

Existen muchos más criterios de convergencia, pero con los que tenemos se pueden hacer muchas cosas. En el Tema de la Integral, veremos el **Criterio de la Intergral** , sencillo y útil que nos permite, entre otras cosas, asegurar que las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ son convergentes si $p > 1$.

Apéndice:

Teorema. 7. *(* ***Criterio de la Integral****) Dada una función* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *de modo que* $f \geq 0$, *es decreciente y tal que existe la integral* $\int_0^{\infty} f(x)dx$, *entonces la serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *es convergente.*

Demostración: (Ver **Integrales Impropias:** Aplicaciones.) $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`