ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE Y CONDICIONALMENTE CONVERGENTES.

En general, repetimos, no vamos a poder encontrar la suma de una serie convergente. Hemos visto criterios para series de términos positivos. ¿Qué ocurre cuando los términos de la serie son de signo alternado?

Proposición. 1. *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, si la serie en valor absoluto* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente, entonces también lo es la primera serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Demostración: Consideramos

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}.$$

Como $b_n \leq |a_n|$ y $c_n \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene por comparación que las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son ambas convergente. Ahora como $a_n = b_n - c_n$ para todo n, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$\square$

Definición. 1. *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que*

- **a:** ***converge absolutamente*** *si la serie en valor absoluto converge (e.d. si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente);*
- **b:** *es* ***condicionalmente convergente*** *si la serie converge, pero no lo hace en valor absoluto.*

Procedimiento: Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

- primero la ponemos en valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$;

- a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ le aplicamos los criterios de convergencia para series de términos positivos que hemos visto;
- si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ es convergente, también lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;
- si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **no** es convergente, entonces aplicamos los criterios de convergencia para series alternadas a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;

CRITERIOS DE CONVERGANCIA PARA SERIES ALTERNADAS:

Teorema. 1. ***Criterio de Dirichlet:*** *Sean dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ de modo que se verifican estas dos condiciones,*

- *$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$, para $n\in\mathbb{N}$, es un sucesión $(A_n)_n$ acotada.*
- *$(b_n)_n$ es una sucesión monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.*

Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ es convergente.

Demostración: Sea $M>0$ una cota de la sucesión $(A_n)_n$, es decir

$$|A_n|\leq M \qquad \text{para todo} \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Vamos a aplicar el Criterio de Cauchy a la sucesión $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$.

Dado $\epsilon>0$ podemos encontrar un n_0 de modo que

- para todo $n\geq n_0$ se tenga que $|b_n|\leq\frac{\epsilon}{3M}$ (usamos que $\lim_{n\to\infty}b_n=0$).
- para todo $m,n\geq n_0$ se tenga que $|b_m-b_n|\leq\frac{\epsilon}{3M}$ (usamos que $(b_n)_n$ es de Cauchy).

Ahora si $m,n\geq n_0$ se sigue que

$$|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k|=|\sum_{k=n+1}^{m}(A_k-A_{k-1})b_k|=$$

$$|\sum_{k=n+1}^{m}A_kb_k\;-\;\sum_{k=n}^{m-1}A_kb_{k+1}|=$$

$$|\sum_{k=n+1}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})\;+\;A_mb_m-A_nb_{n+1}|\leq$$

$$|\sum_{k=n+1}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})|+|A_mb_m|+|A_nb_{n+1}|\leq$$

$$\sum_{k=n+1}^{m-1}M|(b_k-b_{k+1})|+M\frac{\epsilon}{3M}+M\frac{\epsilon}{3M}=$$

por ser $(b_n)_n$ decreciente

$$M(b_{n+1}-b_m)+\frac{2\epsilon}{3}\leq M\frac{\epsilon}{3M}+\frac{2\epsilon}{3}=\epsilon \qquad \square$$

Corolario. 1. ***Criterio de Leibniz:*** *Sea una sucesión $(a_n)_n$ decreciente y convergente a cero. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración: Usando el criterio anterior para

$$|A_n| = |\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| \leq 1,$$

se sigue que la serie converge $\square$

El ejemplo típico es la sucesión alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

que es convergente.

Ejemplo. 1. *La serie $\frac{\cos n\theta}{n}$, con $\theta \in [0,2\pi]$ tiene el siguiente comportamiento.*

Demostración:

- Para $\theta = 0$ o $\theta = 2\pi$ tenemos la serie armónica que no converge.
- Para $\theta = \pi$, como $\cos n\pi = (-1)^n$, la serie alternada converge por el Criterio de Leibniz.
- Para $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ tenemos que la serie converge.
- Para $\theta \in (0,2\pi)\backslash\{\,\pi/2,\pi,3\pi/2\,\}$, usamos el Criterio de Dirichlet. Como
$$\sum_{k=1}^{M}\cos nx = \frac{\operatorname{sen}(M+1/2)\theta}{2\operatorname{sen}(\theta/2)} - 1/2 \qquad \text{(núcleo de Dirichlet)},$$
esta expresión (ver prueba al final) está acotada. Así la serie converge $\square$

Teorema. 2. ***Criterio de Abel:*** *Sea una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y sea una sucesión $(b_n)_n$ monótona y acotada. Entonces la serie producto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \qquad \textit{está acotada.}$$

Demostración: Vamos a aplicar convenientemente el Criterio de Dirichlet. Por un lado, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la sucesión

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

está acotada.

Por otro lado, por ser (b_n) monótona y acotada, existe $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Así

- Si $(b_n)_n$ es decreciente, $(b_n - b))_n$ es decreciente y convergente a cero, por tanto
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$$
es convergente y como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ es convergente, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
- Si $(b_n)_n$ es creciente, $(b - b_n))_n$ es decreciente y convergente a cero, por tanto
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b - b_n)$$
es convergente y como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ es convergente, también converge $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

En cualquier caso la serie producto converge $\square$

Veamos que las hipótesis del resultado anterior son necesarias.

Ejemplo. 2. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *es convergente (usa el Criterio de Leibniz). Además* $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$. *Sin embargo la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
no es convergente $\square$

Apéndice: Veamos que
$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\theta}{2\operatorname{sen}(\theta/2)} - 1/2.$$
Demostración: Usando la fórmula trigonométrica
$$2\cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B),$$
tenemos que
$$(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta) 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} =$$
$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{sen}(k+\frac{1}{2})\theta - \operatorname{sen}(k-\frac{1}{2})\theta] =$$
como se cancelan sumandos
$$\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta.$$

Solo queda despejar de forma adecuada $\square$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es