Tema 8: Conjuntos y Relaciones

Definiciones: Un **conjunto** es una colección de objetos que llamamos sus **elementos**. Acostumbramos a representar los conjuntos por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y sus elementos por minúsculas. $a, b, c, \ldots$. Escribimos $a \in A$ para decir que a es elemento del conjunto-A.
Los conjuntos se pueden definir enumerando sus elementos, tal como $A = \{1, 4, 7, 9, 16, 25, 49\}$, o dando una propiedad, que caracteriza a estos, ya sea definida por una fórmula matemática o lógica. Así, $A = \{m \in \mathbf{N} : m \leq 60, \wedge \exists n \in \mathbf{N}, n2 = m\}$.
Un conjunto A es **subconjunto** de otro B: $A \subset B$, si todo elemento de A lo es de B. Dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos. Así, para demostrar la igualdad entre dos conjuntos A y B hay que demostrar que $A \subset B$ y $B \subset A$.

8.1. Operaciones básicas con conjuntos

Las operaciones entre conjuntos, **unión** e **intersección** se definen como:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},\ A \cap B\{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B := \{x : x \in A \wedge\ x \notin B\}$$

Los conjuntos que utilizamos se suponen contenidos dentro de otro mayor U, llamado **universo**.
Llamamos complementario del conjunto A, y lo notamos A^c al conjunto $U - A$
Sean A, B y C tres conjuntos. Recuerda las propiedades distributivas de la unión e intersección, y las leyes de De Morgan:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1. Si A, B, C son subconjuntos de un conjunto X, demostrar que

$$(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad.

2. (i) Denotamos por A el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 5, y por B el de los que terminan en 5 ó en 0. Demuestra que $A = B$.
(ii) Sean A el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 4y B el de los que terminan en 4 Comprueba que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

3. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos:
a) $\bigcup_{n=1} 7 \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{7}, 1\right]$
b) $\bigcap_{n=2}^{k} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $k \geq 2$

8.2. Producto cartesiano de dos conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, el **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados (m, n) tales que $m \in A$ y $n \in B$.

Estudiar algunos ejemplos para entender el concepto, ayudándose de una repesentación gráfica, tales como $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $[2,3] \times [1,2]$, $[0,\infty] \times \mathbb{R}$ etc.

8.3. Relaciones en un conjunto. Relaciones de equivalencia

Dar **una relación** R entre los elementos de un conjunto A es dar un subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$. Dado un par de elementos $(a,b) \in A \times A$, decimos que*a* **esta relacionado con** b, si $(a,b) \in R$ Escribimos $n \sim_R m$, o abusando de la notación, nRm.
Sea R una relación en el conjunto A.

- Se dice que R verifica la propiedad **reflexiva** cuando para cada $p \in A$ se verifica que $(p,p) \in R$.
- Se dice que R verifica la propiedad **transitiva** cuando para todos $m,n,p \in A$ tales que $(m,n) \in R$ y $(n,p) \in R$ se cumple también que $(m,p) \in R$.
- Se dice que R verifica la propiedad **simétrica** cuando para todos $m,n \in A$ tales que $(m,n) \in R$ se cumple también que $(n,m) \in R$.
- Se dice que R es una **relación de equivalencia cuando es reflexiva, transitiva y simétrica.**

4. En el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros, consideramos las relaciónes siguientes. Decir qué propiedades de las anteriores verifican y cuáles son relaciones de equivalencia.

(i): mRn si $m-n$ es par.
(ii) mRn cuando m divide a n.
(iii) mRn cuando m y n tienen la misma paridad.

8.4 Clases de equivalencia, particiones y conjunto cociente

Sea R **una relacion de equivalencia** definida en un conjunto C. Para cada $m \in C$, el subconjunto de C,

$$[m]_R = \{p \in C : (m,p) \in R\} \subset C$$

formado por todos los todos los elementos de C que se relacionan con m, se denomina **clase de equivalencia de** m **en R.**

5. Dado un entero positivo m, fijo, considera en el conjunto $\mathbf{Z}$ la relación R_m definida por , $aR_mb \Leftrightarrow a-b$ es múltiplo de m. Escribimos también $a \equiv b \mod m$. (i) Demostrar que es una relación de equivalencia. (ii) Si $m=4$, ¿cuáles de los siguientes enteros estan relacionados entre sí: $-3,-5,-16,4,6,201$?

6. (i) Demostrar que la relación de equivalencia anterior coincide con la relación, aRb sí y sólo si los enteros a y b dan el mismo resto al ser divividos por m.
(ii) Describir las clases de equivalencia (**clases de restos módulo** m demostrando que hay exactamente m clases distintas; a saber, $[0]_{R_m}, [1]_{R_m}, \cdots, [m-1]_{R_m}$, que en adelante denotamos simplemente $[0]_m, [1]_m, \cdots, [m-1]_m$.
(iii) Si $m=6.$, ¿en cuál de las clases anteriores están el $-23,-11,-7,15,41,256$?

Dada una relación de equivalencia R en el conjunto C, llamamos **conjunto cociente**, C/R. al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia.

Dar una **partición** de un conjunto C, es dar una colección finita de **subconjuntos disjuntos** $C_1, \ldots, C_k \subset C$ tales que :

$$C = \cup_{i=1} k C_i$$

Es decir, todo elemento de C está en uno y sólo uno de los subconjuntos que forman la partición.

7. (i) Se considera en el conjunto C una relación de equivalencia R. Demuestra que las clases de equivalencia de R dan lugar a una partición del conjunto C. (ii) Se considera una partición $C_1, \ldots, C_k$ de un conjunto C. Se define en C la relación: $aRb \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, k\} : a, b \in C_i$. Demuéstrese que es una relación de equivalencia.

8. En el conjunto de los puntos del plano $\mathbf{R}2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ se definen las relaciones R y S siguientes: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a2 + b2 = c2 + d2$ $\quad (a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$.
a) Demuestra que ambas son relaciones de equivalencia.
b) En cada caso, determina la clase del punto (1, 0).
c) Describe geométricamente las clases de equivalencia y el conjunto coiente de ambas relaciones.

9. En el conjunto $A = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$, consideramos la relación R definida del siguiente modo $(m, n)R(p, q) \Leftrightarrow mq = np$.
a) Demuestra que se trata de una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(3, -5)$, del $(-7, 1)$ y del $(8, 4)$?
c) Justifica que cada clase de equivalencia representa un número racional.

Anexo

Las operaciones de unión e intersección se pueden definir de manera obvia (explicar como) para una cantidad infinita de conjuntos.

10. i) $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$
ii) $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1)$
iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbf{R}$

ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CONJUNTOS ORDENADOS.

RELACIONES DE ORDEN.

Definición. 1. *Dada un conjunto A y una relación $\mathfrak{R}$ sobre él, decimos que la **relación es de orden** si se verifica las siguientes propiedades:*

- **Reflexiva:** *para todo $a \in A$ se tiene que $a\mathfrak{R}a$.*
- **Antisimétrica:** *para todo par de elementos $a, b \in A$ de modo que $a\mathfrak{R}b$ y $b\mathfrak{R}a$ se verifica que $a = b$.*
- **Transitiva:** *para $a, b, c \in A$ si $a\mathfrak{R}b$ y $b\mathfrak{R}c$, entonces necesariamente $a\mathfrak{R}c$.*

Un ejemplo claro de relación de orden es el orden natural de los números Naturales.

Definición. 2. *Un conjunto A se dice que es*

- **Parcialmente ordenado::** *si sobre A se ha establecido una relación de orden.*
- **Totalmente ordenado:** *si sobre A se ha establecido una relación de orden (la notamos por "$\leq$") de modo que para todo $x, y \in A$ se tiene que o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$.*

Ejemplo. 1. *Dado un conjunto A se considera el conjunto de todos sus subconjunto $\mathfrak{P}(A)$. Dados $C_1, C_2 \in \mathfrak{P}(A)$ se dice que $C_1 \leq C_2$ si $C_1 \subseteq C_2$. Es fácil comprobar que lo anterior es una relación de orden sobre $\mathfrak{P}(A)$. Es fácil también ver que $\mathfrak{P}(A)$ **no** es un conjunto totalmente ordenado si A tiene la menos dos elementos ¿por qué?*

Los conjuntos de números, menos $\mathbb{C}$, son ejemplos de conjuntos totalmente ordenados. Entender el orden de $\mathbb{R}$ es esencial en un curso de funciones de una variable real.

Definición. 3. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $B \subseteq A$.*

a: *se dice que $M \in A$ es una **cota superior** de B si $b \leq M$ para todo $b \in B$.*

b: *se dice que $m \in A$ es una **cota inferior** de B si $m \leq b$ para todo $b \in B$.*

c: *se dice que alpha $\in A$ es el **supremo** de B, notamos por $\alpha = \sup B$, si es la menor de las cotas superiores de B; es decir si*
- *α es cota superior de B y*
- *para todo M cota superior de B se tiene que $\alpha \leq M$.*

d: *Si $\alpha = \sup B$ y además $\alpha \in B$ se dice que α es el **máximo** de B (escribimos $\alpha = \max B$).*

e: *se dice que $\beta \in A$ es el **ínfimo** de B, notamos por $\beta = \inf B$, si es la mayor de las cotas inferiores de B; es decir si*
- *β es cota inferior de B y*
- *para todo m cota inferior de B se tiene que $m \leq \beta$.*

f: *Si $\beta = \inf B$ y además $\beta \in B$ se dice que β es el **mínimo** de B (escribimos $\beta = \min B$).*

Ejemplo. 2. *Sea $B = \{\, n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ es múltiplo de } 3 \,\}$.*

- 2 es cota inferión de B. Claro, $2 \leq 3k$ para todo $k = 1, 2, 3, ...$
- $3 = \min B$.
- B no tiene cotas superiores en $\mathbb{N}$. No existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $3k \leq M$ para todo $k = 1, 2, 3, ...$ Claro, no puede ocurrir que $3M \leq M$.
- Por lo anterior, B no tiene supremo.

Una propiedad particular de los números naturales $\mathbb{N}$ es la de estar bien ordenados. Solo los naturales tienen esta propiedad entre los conjuntos de números.

Definición. 4. *Un conjunto $(A; \leq)$ ordenado se dice que está **bien ordenado** si para todo subconjunto $B \subseteq A$ no vacio ($B \neq \emptyset$) se verifica que existe $\min B$.*

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es