AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES T-PERIÓDICAS

Consideramos f una señal, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periódica o solamente definida en un intervalo de longitud T.

FIGURA 1. Señal registrada entre 0 y T.

Para escribir la función f como una serie de Fourier parece más lógico usar la familia ortogonal

$$\{1, \cos\frac{2\pi}{T}nx, \cos\frac{2\pi}{T}nx\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \text{para} \qquad x \in [0, T].$$

Observación 1. *El cambio de variable* $y = \frac{2\pi}{T}x$ *(y así* $dx = \frac{T}{2\pi}dy$*), permite ver que:*

1. $\displaystyle\int_0^T 1dx = T.$
2. $\displaystyle\int_0^T \cos^2(\frac{2\pi}{T}nx)dx = \frac{T}{2} = \int_0^T \operatorname{sen}^2(\frac{2\pi}{T}nxdx).$
3. $\displaystyle\int_0^T \cos(\frac{2\pi}{T}nx)\cos(\frac{2\pi}{T}mx)dx = 0$ *si* $n \neq m.$
4. $\displaystyle\int_0^T \cos(\frac{2\pi}{T}nx)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}mx)dx = 0.$
5. $\displaystyle\int_0^T \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}mx)dx = 0$ *si* $n \neq m.$

Demostración: Como ejemplo, vamos a ver como sale la identidad 5. Las otras se hace de forma similar.

$$\int_0^T \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}mx)dx$$

usando el cambio de variable $y = \dfrac{2\pi}{T}x$,

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(ny)\operatorname{sen}(my)\frac{T}{2\pi}dy = 0 \qquad \text{para} \qquad n \neq m \ \square$$

Los **coeficientes de Fourier** de f (T-periódica) respecto de esta familia ortogonal son

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)dx,$$

y

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx)dx.$$

Ahora la correspondiente **serie de Fourier** es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx).$$

Las integrales anteriores pueden ser calculadas en cualquier intervalo de longitud T, como muestra el siguiente lema.

Lema 1. *Si f es una función T-periódica y continua en $[0,T]$, salvo quizás en una cantidad finita de puntos, entonces se tiene que para todo $r \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \int_r^{r+T} f(t)dt.$$

Demostración: Solo hace falta ver la segunda igualdad, la primera es un caso particular para $r = -\frac{T}{2}$.

$$\int_r^{r+T} f(t)dt = \int_r^0 f(t)dt + \int_0^{r+T} f(t)dt$$

haciendo el cambio de variable $t = x - T$ en la primera integral,

$$\int_{r+T}^{T} f(x-T)dt + \int_{0}^{r+T} f(t)dt = \int_{r+T}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{r+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

donde hemos usado que f es T-periódica en la primera igualdad $\square$

Veamos un ejemplo de cálculo para una función 1-periódica.

Ejemplo 1. $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & si \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ *Es una función* 1*-periódica. Veamos como es su serie de Fourier.*

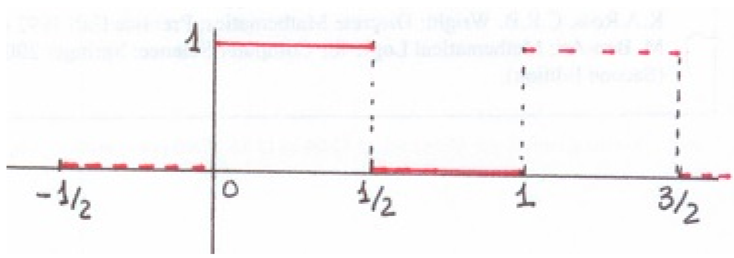

Figura 2. f y su extensión 1-periódica.

Los coeficientes de Fourier son $a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 1$,

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi nx)dx = 2\frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{2\pi n}\Bigg|\begin{matrix}1/2\\0\end{matrix} = 0$$

y

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(2\pi nx)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi nx)dx = -2\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\Bigg|\begin{matrix}1/2\\0\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[1 - \cos n\pi] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{es par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si} \quad n \quad \text{es impar.} \end{cases}$$

Y así la serie de Fourier de f asociada a la familia ortonormal $\{\cos(2\pi nx), \operatorname{sen}(2\pi nx)\}_{n\geq 0}$ sobre el intervalo $[0, 1]$ es

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}(2\pi(2k+1)x).$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es