AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA FÓRMULA INVERSA.

Vamos a ver como volver a recuperar una función o señal a partir de su transformada de Fourier. Esto es lo que se llama **Fórmula Inversa**.

Dada una señal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se considera la serie de Fourier compleja de f en un intervalo $-l \leq x \leq l$ (después vamos a hacer tender l a infinito).

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx} \qquad \text{donde} \qquad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\frac{\pi}{l}nt}dt$$

Estamos suponiendo que la señal f coincide con su serie de Fourier en el intervalo $x \in [-l, l]$ y lo hace uniformemente. Ahora sustituyendo los coeficientes c_n por su valor y tomando límites

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l\to\infty}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\frac{\pi}{l}nt}dt\right)e^{i\frac{\pi}{l}nx}\right] \\ &= \lim_{l\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\frac{\pi}{l}n[x-t]}dt \end{aligned}$$

Ahora vamos a tratar de ver la suma anterior como una **suma de Riemann** de la integral de alguna función. Sea $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ y $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$. Así obtenemos que

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\lambda_n[x-t]}dt\right]\Delta\lambda$$

si escribimos $F_l(\lambda) = \displaystyle\int_{-l}^{l} f(t)e^{i\lambda[x-t]}dt$ la suma anterior queda como

$$= \lim_{l\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}F_l(\lambda_n)\Delta\lambda.$$

Esta última expresión, si no fuese por la l, se parece a una suma de Riemann de la integral $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$. Se puede probar, con algunas condiciones, que si $l \to \infty$ (por tanto $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l} \to 0$), entonces se tiene que

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_l(\lambda)d\lambda$$

y también que si $l \to \infty$, entonces $F_l(\lambda) \to \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt$ y por tanto

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dtd\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Esta cuentas 'informales' nos van a servir de justificación del siguiente teorema. Pero antes, veamos donde tienen sentido buscar transformadas de Fourier.

Lema 1. *Si f es una función absolutamnete integrable, es decir que existe la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$, entonces existe su transformada de Fourier en todo punto, es decir existe $\widehat{f}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración:

$$|\widehat{f}(\lambda)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < \infty$$

donde hemos usado que $|e^{-i\lambda t}| = 1\square$

Teorema 1. ***Teorema de Inversión.***

1. *Si tanto f como $\widehat{f}$ son funciones absolutamente integrables, entonces existe la función*
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$
que verifica que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ *y que* $g(x) = f(x)$ *en casi todo punto* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Si f, además de absolutamente integrable, tiene una derivada f' continua en todo $\mathbb{R}$ se tiene que*
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \qquad \text{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Notación. Escribimos la **transformada inversa de Fourier** por
$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$
y así, el Teorema de Inversión nos dice que $F^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x)$.

Observación 1. *Si hubiesemos definido la transformada de Fourier por*
$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$
y la inversa por
$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$
ambas definiciones serían del todo análogas y tambien se tendría una identidad del tipo $F^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x)$.

Como corolario del Teorema de Inversión tenemos la unicidad de la transformada de Fourier.

Corolario 1. *Si f y g son dos funciones absolutamente integrables con $f \neq g$, entonces $\widehat{f} \neq \widehat{g}$.*

Demostración: Sea $h = f - g$, y suponemos que $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $\widehat{h} = \widehat{f-g} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0$. Luego como h y la función nula son absolutamente integrables, el teorema de inversión nos dice que $h(x) =$

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 0e^{i\lambda x}d\lambda = 0$. Si $h = 0$, se tiene que $f = g$, lo cual contradice las hipótesis $\square$

Ejemplo 1. *Consideramos la función* $f(x) = \operatorname{sen} x\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$, *donde* χ *es la función característica*

$$\chi_{[-\pi,\pi]}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \quad \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

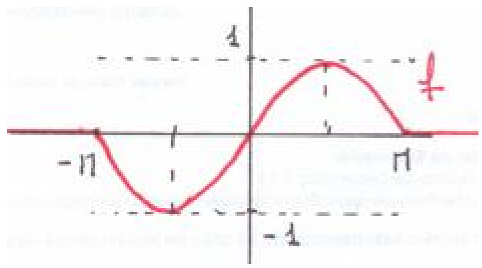

Figura 1. Gráfica de la función de f.

Vamos a calcular la transformada de Fourier de la función f, después la antitransformada de $\widehat{f}$ y obtendremos otra expresión para la función de partida f. En primer lugar, f es una función impar, por tanto

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = -i\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \lambda t dt$$

usando que $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$ tenemos que

$$= \frac{-i}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos t(1-\lambda)dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos t(1+\lambda)dt\right]$$

$$= \frac{-i}{2}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} t(1-\lambda)}{1-\lambda}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{\operatorname{sen} t(1+\lambda)}{1+\lambda}\right|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= -i\left[\frac{\operatorname{sen} \pi(1-\lambda)}{1-\lambda} - \frac{\operatorname{sen} \pi(1+\lambda)}{1+\lambda}\right]$$

usamos ahora que $\operatorname{sen}(A+B) = \cos A \operatorname{sen} B + \cos B \operatorname{sen} A$ y nuestra expresión se transforma en

$$= -i[\frac{1}{1-\lambda^2}((1+\lambda)\operatorname{sen} \lambda\pi + (1-\lambda)\operatorname{sen} \lambda\pi)] = -i\frac{2\operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2}.$$

Esta función es continua en $\lambda = \pm 1$ y por tanto en todo $\mathbb{R}$. Además es absolutamente integrable, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} | - i\frac{2 \operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2} | d\lambda \leq \infty,$$

luego aplicando el Teorema de Inversión y que $\widehat{f}$ es impar, tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\left(-i\frac{2 \operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2}\right) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda$$

y puesto que la función $\dfrac{2 \operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2} \operatorname{sen} \lambda x$ es par concluimos que

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{1-\lambda^2} \operatorname{sen} \lambda x d\lambda.$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`