# AM PRÁCTICA-4

**Nombre y apellidos**..........................................................................

**1.-** Resuelve el problema de Cahchy: $\begin{cases} \frac{x'(t)}{t^2+1} = x^2(t) + 1 \\ x(0) = 1. \end{cases}$

**Indicación:** ¿Qué tipo de ecuación es?

REESCRIBIMOS LA ECUACIÓN COMO: $\begin{cases} \frac{x'(t)}{x^2(t)+1} = t^2+1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

ASÍ VEMOS QUE ES UNA E.D.O DE VARIABLES SEPARADAS. AHORA PROCEDEMOS A INTEGRARLA

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)+1}\,dt = \int t^2+1\,dt = \frac{t^3}{3} + t + k$$

LA PRIMERA INTEGRAL $\int \frac{x'(t)}{x^2(t)+1}\,dt =$ $\left.\begin{matrix} u = x(t) \\ du = x'(t)\,dt \end{matrix}\right\}$ CAMBIO DE VARIABLE

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \text{Arctn}\, u \underset{u = x(t)}{=}$$

$$= \text{Arctn}\, x(t)$$

ASÍ $\text{Arctn}\, x(t) = \frac{t^3}{3} + t + k$

DESPEJANDO $\boxed{x(t) = \text{tn}\left(\frac{t^3}{3} + t + k\right).}$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

AHORA, RESOLVEMOS EL PROBLEMA DE CAUCHY.

COMO $1 = x(0) = \text{tn}(k) \Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$

LUEGO LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ES.

$$\boxed{x(t) = \text{tn}\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

COMPROBACIÓN $x'(t) = \left[1 + \text{tn}^2\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot (t^2+1) \Longleftrightarrow_{t^2+1>0}$

$$\frac{x'(t)}{1+t^2} = 1 + \text{tn}^2\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + x^2(t)$$

**2.-** Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$y' - x^3 y = 2x^3, \qquad y(0) = 1.$$

**Indicación:** ¿Qué tipo de ecuación es? En todo caso ¿es fácil encontrar alguna solución constante?

ESCRIBIMOS $\left\{\begin{array}{l} y'(x) = x^3 y(x) + 2x^3 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$

ES UNA E.D.O. DE PRIMER ORDEN LINEAL NO HOMOGÉNEA.

1:] RESOLVEMOS EL PROBLEMA LINEAL HOMOGÉNEO ASOCIADO

$y'(x) = x^3 y(x)$ (EDO DE VARIABLES SEPARADAS)

$\iff \dfrac{y'(x)}{y(x)} = x^3$ INTEGRANDO $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x^3\,dx$

ASÍ $\ln|y(x)| = \dfrac{x^4}{4} + k$.

DESPEJANDO $y(x) = k e^{\frac{x^4}{4}}$ $k \in \mathbb{R}$.

2:] ENCONTRAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O OBSERVAMOS QUE $y \equiv -2$, RESUELVE LA E.D.O

(TAMBIÉN SE PUEDE USAR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES $y_0(t) = k(t) e^{x^4/4}$ ... etc).

3:] SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

$$\boxed{y(x) = -2 + k e^{x^4/4} \quad k \in \mathbb{R}}$$

4:] RESOLVEMOS EL PROBLEMA DE CAUCHY

$1 = y(0) = 2 + k e^{0/4} = -2 + k$ DESPEJANDO

$k = 3$.

LUEGO LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$\boxed{y(x) = -2 + 3e^{\frac{x^4}{4}}}$$