AM PRÁCTICA-5

Nombre y apellidos..

1.- Resuelve el problema de valor inicial:
$$\left.\begin{array}{r} y''-6y'+9y=27t^2 \\[6pt] y(0)=1, y'(0)=2 \end{array}\right\}$$

Indicación: Resuelve la ecuación característica. Busca una solución particualar $y(t)=at^2+bt+x$ ¿Por qué?

CONSIDERAMOS LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA
$$\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$$
LUEGO $\lambda=3$ ES UNA RAÍZ DOBLE. ASÍ LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA ES
$$x(t)=k_1e^{3t}+k_2te^{3t} \qquad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

EL TÉRMINO NO INDEPENDIENTE $27t^2$ DE LA E.D.O ES UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO. COMO $\lambda=0$ NO ES RAÍZ DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA VAMOS A PROBAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL TIPO

$$\left.\begin{array}{l} y_0(t)=a+bt+ct^2 \\ y_0'(t)=b+2ct \\ y_0''(t)=2c \end{array}\right\}$$

ENTRANDO EN LA E.D.O CON y_0 TENEMOS QUE

$$2c-6(b+2ct)+9(a+bt+ct^2)=(2c-6b+9a)+(-12c+9b)t+9ct^2=27t^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2c-6b+9a & =0 \\ -12c+9b & =0 \\ 9c & =27 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} c=3 \\ b=4 \\ a=2 \end{array}$$

LUEGO
$$\boxed{y(t)=(2+4t+3t^2)+k_1e^{3t}+k_2te^{3t} \quad k_1,k_2\in\mathbb{R}}$$
SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

RESOLVAMOS EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

$$1=y(0)=2+k_1 \Rightarrow \boxed{k_1=-1}$$

AHORA $y'(t)=4+6t-3e^{3t}+k_2e^{3t}+3k_2te^{3t}$

$$2=y'(0)=4-3+k_2 \Rightarrow \boxed{k_2=1}$$

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY ES

$$\boxed{y(t)=2+4t+3t^2-e^{3t}+te^{3t}}$$

2.- Escribe una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y no homogénea que tenga por una de sus soluciones a la función:

$$y(t) = e^{2t} - e^t + t^2.$$

QUEREMOS ENCONTRAR $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)$ DE MODO QUE $e^{2t} - e^t + t^2$ SEA UNA SOLUCIÓN.

SI VEMOS t^2 COMO UNA SOLUCIÓN PARTICULAR Y $e^{2t} - e^t$ UNA SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA, ENTONCES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

ASÍ $\boxed{a = -3}$ Y $\boxed{b = 2}$

SI $y(t) = t^2$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR

$y'(t) = 2t$

$y''(t) = 2$ ENTRANDO EN LA ECU. CON y_0

$$\boxed{f(t) = 2 - 3(2t) + 2t^2 = 2 - 6t + 2t^2}$$

DE LO QUE SE SIGUE QUE LA ECUACIÓN BUSCADA ES

$$\boxed{y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2 - 6t + 2t^2}$$