AM PRÁCTICA-6

Nombre y apellidos..

1.- Resuelve el problema de valor inicial:
$$\left.\begin{array}{r} y'' - 3y' + 2y = 2e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Indicación: Usa la transformada de Laplace.

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}(y''-3y'+2y) = s^2\mathcal{L}y(s) - 3s\mathcal{L}y(s) + 2\mathcal{L}y(s) = (s^2-3s+2)\mathcal{L}y(s)$$

$y(0)=y'(0)=0$

Por otro lado $\mathcal{L}(2e^x)(s) = \frac{2}{s-1}$; Igualando y despejando

tablas

$$\boxed{\mathcal{L}y(s) = \frac{2}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2-3s+2}} = \frac{2}{(s-1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2} =$$

descomposición fracciones simples

$$= \frac{A(s-1)(s-2) + B(s-2) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)} = A(s^2-3s+2) + B(s-2) + C(s^2-2s+1) =$$

operando

$$= \boxed{\frac{s^2(A+C) + s(-3A+B-2C) + 2A-2B+C}{(s-1)^2(s-2)}}$$

por tanto

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ -3A+B-2C=0 \\ 2A-2B+C=2 \end{array}\right\}$$

sistema 3+3

$A=-C$

$-A+B=0$ $\quad B=A$

$A-2B=2$

$-A=2$ $\left\}\begin{array}{l} A=-2 \\ B=-2 \\ C=2 \end{array}\right.$

Luego $\mathcal{L}y(s) = \frac{-2}{s-1} + \frac{2}{s-2} - \frac{2}{(s-1)^2}$

Mirando en las tablas

$$\boxed{y(x) = -2e^x + 2e^{2x} - 2xe^x}$$

¡Solución!

Comprobación

$y'(x) = -2e^x + 4e^{2x} - 2e^x - 2xe^x =$
$= -4e^x + 4e^{2x} - 2xe^x$

$y''(x) = -4e^x + 8e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$
$= -6e^x + 8e^{2x} - 2xe^x$

$y(0) = 0$
$y'(0) = 0$

Entrando en la E.D.O. $-6e^x + 8e^{2x} - 2xe^x - 3(-4e^x + 4e^{2x} - 2xe^x) + 2(-2e^x + 2e^{2x} - 2xe^x) =$
$= 2e^x$ lo que tenía que salir.

2.- Resuelve el problema de valor inicial:
$$\left.\begin{array}{r} x''(t) + 2x'(t) = t^2 + 3 \\ x(0) = 3, x'(0) = 7. \end{array}\right\}$$

Indicación: Usa la transformada de Laplace.

USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE:

$$\mathcal{L}(x'' + 2x') = s^2 \mathcal{L}x(s) - x(0)s - x'(0) + 2s\mathcal{L}x(s) - 2x(0) =$$
$$= (s^2+2s)\mathcal{L}x(s) - 3s - 13$$

POR OTRO LADO $\mathcal{L}(t^2+3) \underset{\text{TABLAS}}{=} \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s}$

IGUALANDO $(s^2+2s)\mathcal{L}x(s) - 3s - 13 = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s}$ DESPEJANDO

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1}{s^2+2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{3}{s} + 3s + 13\right) = \frac{1}{s^2+2s}\left(\frac{2 + 3s^2 + 3s^4 + 13s^3}{s^3}\right)$$

$$= \frac{1}{s^4}\frac{1}{(s+2)}\left[3s^4 + 13s^3 + 3s^2 + 2\right] \underset{\text{DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES}}{=}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s^4} + \frac{E}{s+2} \underset{\text{OPERANDO}}{=} \frac{As^3(s+2) + Bs^2(s+2) + Cs(s+2) + D(s+2) + Es^4}{s^4(s+2)} =$$

OPERANDO E IGUALANDO

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A + E = 3 \\ 2A + B = 13 \\ 2B + C = 3 \\ 2C + D = 0 \\ 2D = 2 \Rightarrow D = 1 \end{array}\right.$$

$C = 1/2$ $B = \frac{7}{4}$ $A = \frac{45}{8}$ $E = 3 - \frac{45}{8}$

ASÍ $\mathcal{L}x(s) = \frac{45}{8}\frac{1}{s} + \frac{7}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{6}\frac{6}{s^4} - \frac{21}{8}\frac{1}{s+2}$

USANDO LAS TABLAS

$$\boxed{x(t) = \frac{45}{8} - \frac{21}{8}e^{-2t} + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{7}{4}t\right)}$$ SOLUCIÓN

COMPROBACIÓN

$$x(0) = \frac{45}{8} - \frac{21}{8} = \frac{24}{8} = 3 //$$
$$x'(t) = +\frac{42}{8}e^{-2t} + \left(\frac{3}{6}t^2 - \frac{2}{4}t + \frac{7}{4}\right)$$
$$x'(0) = \frac{42}{8} + \frac{7}{4} = \frac{42}{8} + \frac{14}{8} = \frac{56}{8} = 7 //$$