SERIES

PROBLEMA 1:) a) $\sum a_n$ y $\sum b_n$ SERIES CONVERGENTE

ASÍ $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \xrightarrow[k\to\infty]{} s$ y $r_k = \sum_{n=1}^{k} b_n \xrightarrow[k\to\infty]{} r$

LUEGO LA SUMA DE LAS SUCESIONES $s_k + r_k$

$$s_k + r_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) \longrightarrow s + r$$

LO QUE PRUEBA EL RESULTADO

USAMOS LAS CORRESPONDIENTES PROPIEDADES PARA SUCESIONES CONVERGENTES

b) SI $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} s$, ENTONCES

$$\lambda s_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda a_n \longrightarrow \lambda s = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ ES CONVERGENTE PERO TAMBIÉN $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, LUEGO POR a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} -a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - a_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{CONVERGENTE.}$$

PROBLEMA 2:)

$\Rightarrow$) SI $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ES CONVERGENTE;

PARA $b_n = \begin{cases} a_n & \text{SI } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{SI } a_n < 0 \end{cases}$ y $c_n = \begin{cases} -a_n & \text{SI } a_n < 0 \\ 0 & \text{SI } a_n \geq 0 \end{cases}$,

SE TIENE QUE $b_n \leq |a_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ES CONVERGENTE.

y $c_n \leq |a_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ES CONVERGENTE.

$\Leftarrow$) LUEGO POR EL EJERCICIO ANTERIOR $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{CONVERGENTE.}$$

SERIES

PROBLEMA 3:]
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} - \frac{1}{1-2/3} =$$

EJERCICIO 1

AMBAS SON SERIES GEOMÉTRICAS CONVERGENTES.

$$= \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

PROBLEMA 4:]
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \frac{3^k - 3}{7^k} =$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k - 3\frac{1}{7^k} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k - 3\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k =$$

EJERCICIO 1

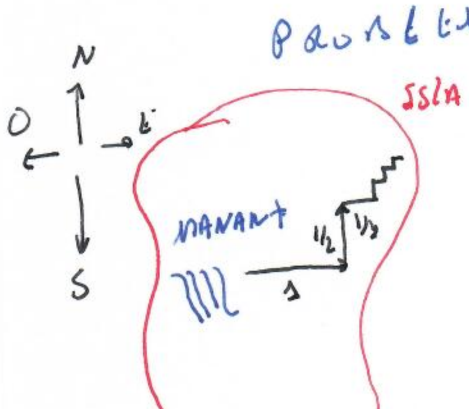
SERIES GEOMÉTRICAS

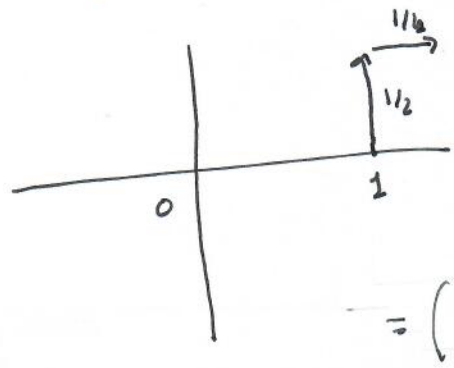
$$= \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^4}{1-\frac{3}{7}} - 3\,\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^4}{1-\frac{1}{7}} =$$

$$= \frac{3^4 \cdot \frac{1}{7^3}}{4} - \frac{3\,\frac{1}{7^3}}{6} = \frac{3}{2\times 7^3}\left[\frac{3^3}{2} - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^3}\left[\frac{3^4-2}{6}\right].$$

PROBLEMA 5:]





$$(0,0) + (1,0) + (0,1/2) +$$
$$+ \left(\frac{1}{4},0\right) + \left(0,\frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k, \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}, \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) =$$

SERIES GEOMÉTRICAS

$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

COORDENADAS DEL TESORO RESPECTO DEL MANANTIAL (0,0)

SERIES.

PROBLEMA 6:

a) $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \cancel{b_2} + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \dots (b_{k-1} - \cancel{b_k}) + (\cancel{b_k} - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}$

Si existe $S = \lim_{k\to\infty} S_k = b_1 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} b_k = b_1 - S}$$

Al contrario si existe $b = \lim_{k\to\infty} b_k$, tendremos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b.$$

b) Sea $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, así $b_n - b_{n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_n$..

c) • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ observamos que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \quad \text{si } A(n+1) + Bn = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix} \quad y$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \underset{a)}{=} \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$$

•• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

••• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{1+2^n} + \frac{B}{1+2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(1+2^{n-1}) + B(1+2^n)}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$

Si $\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 1 \end{matrix}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{1+2^n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2^n} = 1.$$

SERIES

EJERCICIO 7: a) SI APLICAMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(a(n+1)+b)\,r^{n+1}|}{|(an+b)\,r^n|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{an+a+b}{an+b}\right||r| = |r|$$

SI $|r|>1$ LA SERIE DIVERGE.

SI $r=1$ LA SERIE $\sum an+b$ NO CONVERGE

O $r=-1$ (EL LÍMITE $\lim_{n\to\infty} an+b \neq 0$ SI $a\neq 0$ Ó $b\neq 0$.

SI $|r|<1$ LA SERIE CONVERGE.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(an+b)\,r^n = a\sum_{n=1}^{\infty} nr^n + b\sum_{n=1}^{\infty} r^n$

NECESITAMOS SABER A QUÉ CONVERGE $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} nr^n = r + 2r^2 + 3r^3 + \quad + Nr^N$$

$$S_{N+1} = \ldots = r + 2r^2 + \quad + Nr^N + (N+1)r^{N+1}$$

$$r\,S_N = \quad = r^2 + 2r^3 \quad + N\,r^{N+1}.$$

$$\text{LUEGO} \quad \underbrace{S_{N+1} - r\,S_N}_{S - rS} = \underbrace{r + r^2 + \ldots \quad + r^{N+1}}_{\text{SERIE GEOMÉTRICA}} \quad \text{TOMANDO LÍMITES}$$

$$S - rS = \frac{r}{1-r}$$

$$\text{LUEGO} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$$= 3\left[\frac{1/3}{(1-1/3)^2}\right] + \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{(1-1/3)^2} + \frac{1/3\,(1-1/3)}{(1-1/3)^2}.$$

SERIES

PROBLEMA 8: En los tres casos se utiliza el criterio del cociente.

Así para $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, tomamos valores absolutos, aplicamos el criterio del cociente y vemos que converge absolutamente

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|(-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2(k+1)}}{2(k+1)!}\right|}{\left|(-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k!\,|x|^{2k+2}}{2(k+1)!\,|x|^{2k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0.$$

PROBLEMA 9: En el tema de sucesiones se definió el número e como el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

a) Observemos que $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$

Binomio de Newton

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\leq 1} + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\leq 1} + \cdots + \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Por otro lado, tomando $m < n$, m fijo

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \geq}$$

$$\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

tomando límites en n.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

SERIES

PROBLEMA 9:

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

$\downarrow n\to\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow n\to\infty$

$e \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

b) Por otro lado, para $m<n$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$

$\downarrow n\to\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow n\to\infty$

$e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!} \quad \forall m\in\mathbb{N}$

Luego $\quad e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+7n+6}{(n+2)!} =$

$$\begin{array}{r|l} 2n^2+7n+6 & n^2+3n+2 \\ -2n^2-6n-4 & 2 \\ \hline n+2 & \end{array}$$

$(n+2)(n+1) = n^2+3n+2$ si divisimos

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+2)+(n+2)}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} =$

$= 2e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}+1-1 = 2e+e-1 = \underline{3e-1}$

PROBLEMA 10: Como $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente para todo $\varepsilon>0$

usando el criterio de Cauchy (en forma CL)

$\exists\, N_0$ tal que si $m>n>N_0$ $\qquad = m a_m-(N+1)a_m.$

$\varepsilon/2 \geq \sum_{k=N+1}^{m}a_k \geq (m-N-1)a_m$

para este $N+1$ existe m_0 tal que si $m\geq m_0 > N$ $\quad \lim_{m\to\infty}(N+1)a_m=0$

$|N+1|a_m < \varepsilon/2$ ya que $\qquad \forall\, \underline{m>m_0}$

Así $\quad \varepsilon/2+\varepsilon/2 \geq \varepsilon/2+(N+1)a_m \geq m a_m$

Luego por definición de límite

$\lim_{m\to\infty} m a_m = 0.$

SERIES

PROBLEMA 11:

$$\sum_{n=k+1}^{r} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{r(r-1)\cdots(k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots r}\right] ¿\leq? \frac{1}{k\,k!}$$

PARA RESOLVER LA DESIGUALDAD, TENEMOS QUE VER QUE

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k+1)\cdots(k+(r-k))} \leq \frac{1}{k} \quad \forall r > k$$

$$\Longleftrightarrow k\left[(k+2)\cdots(k+(r-k)) + (k+3)\cdots(k+(r-k)) + \cdots + 1\right] <$$

$$< (k+1)(k+2)\cdots r)$$

$$\Longleftrightarrow k\left[(k+3)\cdots(k+(r-k)) + \cdots + 1\right] < (k+2)(k+3)\cdots r$$

$$\Longleftrightarrow k\left[(k+4)\cdots(k+r-k)) + \cdots + 1\right] \leq 2(k+3)\cdots r$$

$$\Longleftrightarrow k\left[(k+5)\cdots(k+r-k) + \cdots + 1\right] \leq 2 \cdot 3(k+4)\cdots r$$

$$\vdots$$

$$\Longleftrightarrow k \leq (r-1)!\, r$$

LO CUAL ES CIERTO PARA $r > k$.

PROBLEMA 12:

SEA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

TOMAMOS $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} \leq$

SI $N < 2^k$

$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{2\ 3}_{2}\ \underbrace{4\ 5\ 6\ 7}_{4}\ \underbrace{8\ 9\ 10\ 11\ldots}_{8}$

$$\leq 1 + 2\frac{1}{2^2} + 4\frac{1}{(2^2)^2} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{(2^{k-1})^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$