SERIES.

1.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Prueba que:

a) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

c) También prueba que si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son convergentes, entonces también lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2.- Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si y solo si las series correspondientes a sus términos positivos y negativos son ambas convergentes.

3.- Calcula la suma de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}.$$

4.- Calcula $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \frac{3^k - 3}{7^k}$.

5.- Un sabio pirata decidió enterrar su tesoro en la Isla Calavera en la posición límite de los puntos siguientes: partiendo del único manantial de la isla se avanza 1 hacia el este, después la mitad hacia el norte, de nuevo la mitad hacia el este, después la mitad hacia el norte y así sucesivamente. ¿Sabrías donde se encuentra el tesoro?

6.- Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones tales que $a_n = b_n - b_{n+1}$.

a) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si (b_n) es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

b) Prueba que para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se puede encontrar una sucesión $(b_n)_n$ que verifica las condiciones de arriba.

c) Aplica el apartado a) al cálculo de la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2}).$$

7.- Una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(an+b)r^n$, con $a \neq 0$, se llama *serie aritmético-geométrica.*

a) Prueba que tal serie converge si y solo si $|r| < 1$.

b) Calcula su suma. ¿Cuánto suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$?

8.- Prueba que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. Deduce que lo mismo les pasa a las series

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Dado que estas series convergen para todo $x \in \mathbb{R}$ se definen las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \to & e^x & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \to & \operatorname{sen} x & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \to & \cos x & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \end{array}.$$

9.- a) prueba que $e = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

b) Usa el apartado a) para calcular la suma de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+7n+6}{(n+2)!}$.

Nota: Probaremos que e^x es una función positiva, estrictamente creciente y inyectiva. De aquí se puede deducir que existe la función inversa que llamaremos logaritmo

$$\begin{array}{ccccc} \ln & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & \ln x = y \end{array}, \text{ de modo que } e^y = x.$$

Probaremos a lo largo del curso que las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, introducidas anteriormente, son 2π-periódicas (e.d. $\cos(x+2\pi) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$), que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y en definitiva todas las propiedades que sobre estas funciones se introdujeron en cursos anteriores.

10.- Dada una sucesión $(a_n)_n$ decreciente de números reales positivos de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, prueba que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

11.- Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, prueba que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{k!k} \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

12.- Demuestra que todas las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ son menores que 2.