SERIES II

PROBLEMA 1:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^4}$ Como $\frac{1}{(\ln n)^4} \downarrow 0$,

el criterio de Leibniz nos dice que la serie converge. Ahora

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$ si usamos el criterio de condensación, esta serie tiene el mismo carácter que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{(\ln 2^j)^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j^4} \cdot \frac{1}{(\ln 2)^4}$$

Esta nueva serie diverge. Veámoslo, por el criterio del cociente

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{2^{j+1}}{(j+1)^4}}{\frac{2^j}{j^4}} = \lim_{j\to\infty} 2\left(\frac{j}{j+1}\right)^4 = 2 > 1.$$

b) $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{2k+1}{2k}$ no converge a cero, luego la serie diverge, y lo mismo en valor absoluto.

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{1}{n+1}.$$

La serie converge, criterio de Leibniz. No lo hace en valor absoluto ya que es comparable con $\sum \frac{1}{n+1}$.

d) Es una serie absolutamente convergente

SERIE II

PROBLEMA 2:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/2}}$ CONVERGENTE $(n+1/2 > 1)$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2-1)^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}} = 1$

COMO LA SERIE $\sum \frac{1}{n^{2/3}}$ ES DIVERGENTE, TAMBIÉN LO ES LA PRIMERA (CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$ DIVERGE.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a$ $(a>0)$ USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)^a}{a^n n^a} = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{n+1}{n}\right)^a = a$

SI $a>1$ LA SERIE DIVERGE.

SI $a=1$ LA SERIE $\sum n$ DIVERGE.

SI $a<1$ LA SERIE CONVERGE.

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

COMO EN EL CASO ANTERIOR HAY QUE ESTUDIAR DISTINTOS CASOS. VEAMOS EL CASO $\alpha \in (0,1]$ Y $\beta \geq 0$.

USANDO EL CRITERIO DE CONDENSACIÓN

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{2^{j\alpha} j^{\beta}(\ln 2)^{\beta}} = \sum \frac{2^{j(1-\alpha)}}{j^{\beta}(\ln 2)^{\beta}}$$

USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE, VEMOS QUE ESTA SERIE DIVERGE.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2\sqrt{n+1}}$

DIVERGENTE.

SERIES II

PROBLEMA 2:

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$ $\qquad \sum \left| \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2} \right| \le \sum \frac{1}{n^2}$

LA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$ $\qquad$ USEMOS EL CRITERIO DE COMPARACION POR COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+1/n}}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \quad \text{YA QUE}$$

OBSERVEMOS QUE $\ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

LA SERIE DIVERGE, YA QUE LO HACE $\sum 1/n$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/n}}$

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \quad \text{YA QUE}$$

$\ln n^{1/n} = 1/n \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ /

COMO $\frac{1}{n^{1/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$, LA SERIE DIVERGE

j) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1+\frac{1}{2}+1/3+\dots+1/2n}$, $\quad e^{1+\dots+1/2n} > 1$,

LA SERIE DIVERGE

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ $\qquad$ USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 0 < 1$$

LA SERIE CONVERGE

SERIES II

PROBLEMA 2:

l) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$ CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\, n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\,\cancel{(n+1)}\,\frac{1}{(n+1)^{\cancel{n+1}}}\cdot n^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

CONVERGENTE

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$ ES DIVERGENTE ¿POR QUÉ?

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1/2 < 1;$$ LA SERIE

ES CONVERGENTE

ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n+1)}{3\cdot 6 \cdots 3n}$ CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3(n+1)} = 2/3 < 1;$$ CONVERGENTE

o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$ USAMOS EL CRITERIO DE CONDENSACIÓN

ASÍ LA SERIE $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{(\ln 2^j)^4} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j^4 (\ln 2)^4}$

SI A ESTA SERIE LE APLICAMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\frac{2^{j+1}}{(j+1)^4(\ln 2)^4}}{\frac{2^j}{j^4(\ln 2)^4}} = \lim_{j\to\infty} 2\left(\frac{j}{j+1}\right)^4 = 2 > 1;$$ NO CONVERGE;

POR TANTO TAMPOCO LA SERIE ORIGINAL

SERIE II

PROBLEMA 2:] p) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

APLICAMOS EL CRITERIO DE LA RAÍZ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

LA SERIE ES CONVERGENTE.

q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. CRITERIO DE CONDENSACIÓN.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2^j)^{\ln 2^j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{j\ln 2}(\ln 2)^{j\ln 2}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{j\ln 2}$$

APLICANDO EL CRITERIO DE LA RAÍZ

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\left(\frac{1}{j}\right)^{j\ln 2}} = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{\ln 2} = 0 < 1$$

LA SERIE CONVERGE, POR LO TANTO LA SERIE ORIGINAL

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \frac{1}{n}}$.

ESTA SERIE ES CONVERGENTE, POR TANTO TAMBIÉN LO ES LA MÁS PEQUEÑA.

s) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ CRITERIO DE LA RAÍZ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 < 1$$

POR TANTO LA SERIE ES CONVERGENTE.

SERIES II

PROBLEMA 2: t) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p \ln n}$, $p>0$

Como $n > \ln n$,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p \ln n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{pn} = \frac{1}{p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$; LA SERIE ARMÓNICA $\underline{\text{NO}}$ ES CONVERGENTE, LUEGO ALGO MAYOR TAMPOCO.

u) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ DIVERGENTE YA QUE

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = 1$

Como $\sum \frac{1}{n}$ $\underline{\underline{\text{NO}}}$ ES CONVERGENTE, TAMPOCO LO ES LA SERIE $\sum \sqrt{n^2+1} - n$.

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ ESTAS SERIES SON CONVERGENTES, AMBAS POR TANTO LA SUMA.

w) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$. $\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ASÍ $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ NO ES CONVERGENTE, TAMPOCO LO ES $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$.

SERIES II

PROBLEMAS 3:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ES CONVERGENTE, PERO NO ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

b) $\sum_{n=2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ ES CONVERGENTE, PERO NO ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, YA QUE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ NO ES CONVERGENTE; LO VEMOS POR EL CRITERIO DE CONDENSACIÓN $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^j}}{\cancel{2^j} \ln 2^j} =$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \quad \underline{\text{NO}} \text{ ES CONVERGENTE.}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

LA SERIE $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ ES CONDICIONALMENTE CONVERGENTE,

EL TÉRMINO $\frac{1}{(1+1/n)^n} \sim \frac{1}{e}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2 + \cos(n\pi)}{n^2}$; $\left| \frac{1/2 + \cos n\pi}{n^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$

COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ ES CONVERGENTE, NUESTRA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{n} \right)$ LA SERIE DIVERGE. SI CONVERGIESE COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ES CONVERGENTE, SE TENDRÍA QUE $\sum \frac{1}{n}$ SERÍA CONVERGENTE Y SABEMOS QUE NO LO ES.

SERIES II

PROBLEMA 4:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ASÍ $\forall \varepsilon > 0$, POR EJEMPLO $\varepsilon = 1$, EXISTE n_0 TAL QUE $\forall n \geq n_0$ SE TIENE QUE $\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \underset{b_n > 0}{\Rightarrow} a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$

ASÍ $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$$

LUEGO LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ES TAMBIÉN CONVERGENTE.

b) DE FORMA ANÁLOGA AL ANTERIOR APARTADO

PROBLEMA 5: SI $\sum a_n$ ES UNA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS Y

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ LA SERIE ES CONVERGENTE.

VEÁMOSLO: $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < r < 1$$

$$\iff \lim_{j\to\infty} \sup\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} : n \geq j \right\} = a < r < 1$$

ASÍ EXISTE j_0 TAL QUE $\forall n \geq j_0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \iff a_{n+1} < a_n r$$

POR TANTO PARA $m > n \geq j_0$

$$a_m \leq r a_{m-1} \leq r^2 a_{m-2} \leq \dots \leq r^{m-j_0} a_{j_0}$$

ASÍ $$\sum_{m=j_0+1}^{\infty} a_m \leq \sum_{m=j_0+1}^{\infty} r^{m_0-j_0} a_{j_0} = \sum_{k=1}^{\infty} r^k a_{j_0} = a_{j_0} \frac{r}{1-r}.$$

LA SERIE ESTÁ MAYORADA POR OTRA QUE CONVERGE

2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ LA SERIE DIVERGE.

SERIES II

PROBLEMA 6: Como en el problema anterior

1) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE.

2) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow$ LA SERIE DIVERGE.

PROBLEMA 7:

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} k\pi}{\ln(1/k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{-\ln k}$ DIVERGE.

b) $\sum \frac{\cos \pi x}{\ln(1/k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{-\ln k}$ ES CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

c) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \ln(1/k) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln k$ DIVERGE

(YA QUE $(-1)^{k+1} \ln k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(1/k)} = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ CONVERGE POR EL CRITERIO DE LEIBNIZ.

PROBLEMA 8: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}00999\ldots =$

$= 0{,}14$

PROBLEMA 9: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$

DOM $f = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ ES CONVERGENTE $\}$

USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{|x|^n}{3n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|$; PARA $x=1$ LA SERIE DIVERGE; PARA $x=-1$ LA SERIE CONVERGE.

LUEGO DOM $f = [-1, 1)$.

SERIES II

PROBLEMA 10:

PODEMOS SUPONER QUE r_n ES DECRECIENTE

CLARO SEA $|r_n|^*$ LA REORDENADA USANDO DE LA CONVERGENCIA DECRECIENTE DE $|r_n|$, DE LA CONVERGENCIA ABSOLUTA, $\sum |r_n| = \sum (r_n)^*$

Y TAMBIÉN $\sum \alpha^{\frac{1}{|r_n|}} = \sum \alpha^{\frac{1}{|r_n|^*}}$

SI VEMOS QUE $\sum \alpha^{\frac{1}{|r_n|^*}} < \infty$.

PARA $r_n \downarrow 0$, COMO $\sum r_n < \infty$, POR EL CRITERIO DE AGLOMERACIÓN

$$\sum r_n < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k r_{2^k} < \infty$$

POR TANTO $2^k \cdot r_{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

ASÍ $2^k r_{2^k} \le 1 \iff 2^k \le \frac{1}{r_{2^k}}$

LUEGO SI $\alpha \in (0,1)$

$$\alpha^{\frac{1}{r_{2^k}}} \le \alpha^{2^k}$$

COMO $\sum 2^k \alpha^{2^k} < \infty$ PARA TODO $\alpha \in (0,1)$

[ESTO ÚLTIMO SALE DEL CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{k \to \infty} 2\alpha^{2^{k+1}-2^k} = \lim_{k \to \infty} 2\alpha^{2^k} = 0 < 1$.)

ASÍ $\sum 2^k \alpha^{\frac{1}{r_{2^k}}} \le \sum 2^k \alpha^{2^k} < \infty$

Y POR EL CRITERIO DE AGLOMERACIÓN

$$\sum \alpha^{\frac{1}{r_n}} < \infty .$$