SERIES II.

1.- Determina si cada una de las series siguientes es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o ninguna de ambas cosas:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^k} \quad k>0$ b) $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+\ldots.$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/2+\cos(n\pi)}{n^2}$

2.- Estudia la convergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n n^a \ (a>0)$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ **g)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2} \quad 0<\theta<2\pi$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$ **i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ **j)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{1+1/2+1/3+\ldots+1/2^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ **l)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ **m)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ **ñ)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot 6\cdot\ldots\ldots\cdot 3n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^k}$ **p)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ **q)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$ **s)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ **t)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p\ln n}, \quad p>0$

u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$ **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ **w)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$

3.- Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1/2+\cos(n\pi)}{n^2}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}\right).$

4.- Sean $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ dos series de términos positivos.

a) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es convergente ¿qué se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$?

b) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente ¿qué se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$?

5.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Reformula el Criterio del Cociente en las dos situaciones siguientes:

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

6.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Reformula el Criterio de la Raíz en las dos situaciones siguientes:

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$.

7.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) La serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} k\pi}{\ln(1/k)}$ es convergente.

b) La serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\ln(1/k)}$ es absolutamnete convergente.

c) La serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \ln(1/k)$ es absolutamnete convergente.

d) La serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(1/k)}$ es convergente.

8.- La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{10^n}$, donde $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $a_n = 9$ para todo $n > 2$, representa el número real:

a) 1,3 b) 0,13 c) 1,4 d) 0,14.

9.- Calcula el dominio de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$.

10.- Sea una sucesión $(r_n)_n$ de modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n|$ es convergente. Prueba que para todo $\alpha \in (0,1)$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{1}{|r_n|}}$ es convergente.