LÍMITES DE FUNCIONES

PROBLEMA 1: b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ ¿Dom f?

NECESITAMOS QUE $1-x^2 \geq 0 \iff |x| \leq 1$

Y QUE $1-\sqrt{1-x^2} \geq 0 \iff 1 \geq \sqrt{1-x^2}$

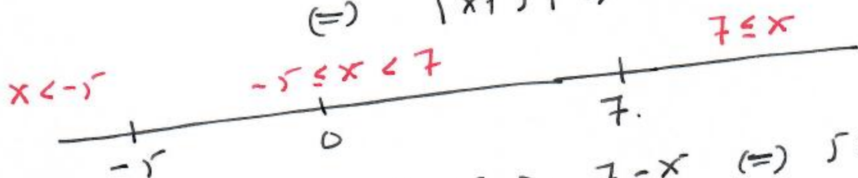
AHORA SI $|x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-|x|^2 \leq 1$

LUEGO $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

c) $f(x) = \sqrt{|5+x| - |x-7|}$

NECESITAMOS QUE $|x+5| - |x-7| \geq 0$

$\iff |x+5| \geq |x-7|$.



SI $x<-5$ $\quad 5-x \geq 7-x \iff 5 \geq 7$ ¡NUNCA!

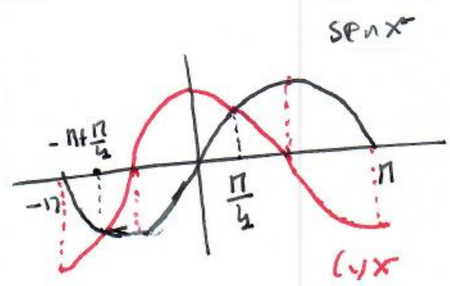
SI $-5 \leq x < 7$ $\quad x+5 \geq 7-x \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1$

LUEGO $x \in [1,7)$

SI $x > 7$ $\quad x+5 \geq x-7 \iff 5 \geq -7$ SIEMPRE.

LUEGO $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

d) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - \cos x}$



$$\mathrm{Dom}\, f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(k\pi + [-\pi, -\tfrac{3\pi}{4}] \cup [\tfrac{\pi}{4}, \pi]\right)$$

f) $f(x) = \ln(\ln x)$ NECESITAMOS $x>0$ Y $\ln x > 0$

LUEGO $\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

i) $f(x) = \operatorname{Arctn}\left(\frac{1-2x}{4}\right)$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$. YA QUE $\mathrm{Dom}\, \operatorname{Arctn} = \mathbb{R}$.

LÍMITES DE FUNCIONES

PROBLEMA 2: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ NO EXISTE

SI $x = \frac{1}{n} \to 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = n.$

y

SI $x = -\frac{1}{n} \to 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n.$

b) $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{SI } x > 0 \\ -1 & \text{SI } x < 0 \end{cases}$ $\quad$ NO EXISTE $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}.$

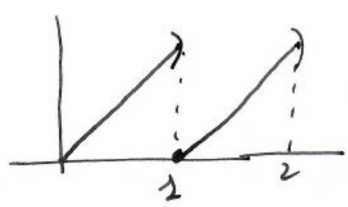
c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-3}{x^2-4}$ $\quad$ COMO $(-2)^3 - 3 < 0$

y $x^2-4 > 0$ SI $2 < |x|$

y $x^2-4 < 0$ SI $|x| < 2$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-3}{x^2-4} &= -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-3}{x^2-4} &= \infty \end{aligned}\right\} \text{ NO EXISTE EL LÍMITE}$$

e) 

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$ $\quad$ NO EXISTE EL LÍMITE

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+6x+x}{x^2+6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2+6x+1)}{\cancel{x}(x+6)} = \frac{1}{6}.$

PROBLEMA 3: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \quad + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} =$

$$= \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \quad + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m x^{m-n} + b_{m-1} x^{m-n-1} + \dots + b_1 x^{1-n} + \frac{b_0}{x^n}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{SI } n = m \\ 0 & \text{SI } n < m \\ \operatorname{sig}\frac{a_n}{b_m}\infty & \text{SI } n > m \end{cases}$$

LÍMITE DE FUNCIONES

PROBLEMA 4: a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)[x^2+2x-3]}{(x-1)[x^2-3x+2]} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-1)}(x-2)} = -4$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-5x+3 & x-1 \\ -x^3+x^2 & x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-5x+3 & \\ -2x^2+2x & \\ \hline -3x+3 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3-4x^2+5x-2 & x-1 \\ -x^3+x^2 & x^2-3x+2 \\ \hline -3x^2+5x-2 & \\ 3x^2-3x & \\ \hline 2x-2 & \end{array}$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3x+1}}{x(2x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3x+1})}{x(2x+1)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3x+1})} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{3x+1})} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+16}+4)}{\cancel{x^2}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{8}{2} = 4.$$

d) $\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ no existe.

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \cos 2n\pi = 1 \quad \forall n.$

$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\cos\frac{1}{\frac{1}{\pi/2+2n\pi}} = 0 \quad \forall n.$

e) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\qquad \left|\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le |\sqrt{x}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Luego $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

¡No tiene sentido $\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ para $x<0$!

LÍMITES DE FUNCIONES

PROBLEMA 5: a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in (-4, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3+1 & \text{si } x \in (0, 2) \\ x+7 & \text{si } x \in [2, 4) \end{cases}$

Dom $f = (-4, 4)$; la adherencia de Dom f

$\overline{\text{Dom } f} = [-4, 4]$

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = (-4)^3 = -64$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3+1 = 1$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x^3+1 = 9$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} x+7 = 9$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} x+7 = 11.$

PROBLEMA 6: a) $\lim_{x \to 0} \text{sen} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to 0} - \text{sen} \frac{1}{x}$ no existe,

pero $\lim_{x \to 0} \text{sen} \frac{1}{x} - \text{sen} \frac{1}{x} \equiv 0$

b) $g(x) = (f+g)(x) - f(x)$ si $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ y $\exists \lim_{x \to a} (f+g)(x)$

entonces existe $\lim_{x \to a} g(x)$

c) no, por el apartado b)

d) si $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f \cdot g(x)}{f(x)}$

SEA $f(x) = x$ y sea $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f \cdot g(x) = 0$, pero no existe $\lim_{x \to 0} g(x)$.

LÍMITE DE FUNCIONES

PROBLEMA 7º) a) $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \iff \boxed{x = a+h}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(a+h) - \ell| < \varepsilon$

$\iff \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell.$

b) $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell \in \mathbb{R}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $0 < x < \delta$

$\iff \left|f\left(\frac{1}{x}\right) - \ell\right| < \varepsilon \iff$ $y = \frac{1}{x}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $\left(0 < \frac{1}{y} < \delta \iff 0 < \frac{1}{\delta} < y\right)$ entonces $|f(y) - \ell| < \varepsilon$

$\iff \lim_{y\to\infty} f(y) = \ell.$

PROBLEMA 8º) a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ (ver teoría; $\underset{x\to\pm\infty}{x \to \pm\infty}$)

b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-1/x}{1-2/x} = 1$

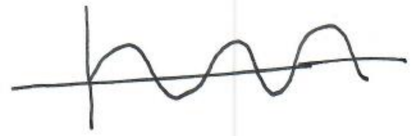
c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} =$ $\to 1$ $\to 0$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \begin{cases} \infty & \text{si } x\to\infty \\ -\infty & \text{si } x\to-\infty. \end{cases}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+1}{7x-15} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{7-15/x} = 5/7.$

LÍMITES DE FUNCIONES

PROBLEMA 9: a) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$



Claramente no tiene límite

($\operatorname{sen} k\pi = 0 \ \forall k$ y $k\pi \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 \ \forall k$ y $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$)

b) $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

PROBLEMA 10: Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

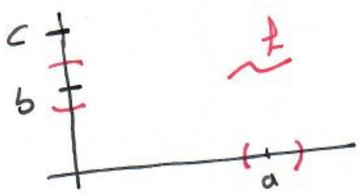
a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 2.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx} = \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\operatorname{sen} bx} \, \frac{a\cancel{x}}{b\cancel{x}} \, \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} = \frac{a}{b}.$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot 2\,\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 4$

PROBLEMA 11:

a)



Sea $\varepsilon = \frac{c-b}{2}$ (entonces $c > b + \frac{c-b}{2} = \frac{b+c}{2}$)

$\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ (entonces $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$)

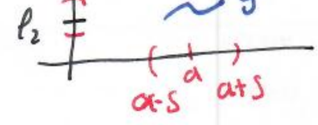
($|b - f(x)| < \varepsilon \iff$

Luego $f(x) < b + \varepsilon < c$

b) Análogo

PROBLEMA 12: a) Si $l_1 = \lim_{x\to a} f(x)$ y $l_2 = \lim_{x\to a} g(x)$

y suponemos $l_1 > l_2$



¡Contradicción con $f \leq g$!

Para $\varepsilon < \frac{|l_2 - l_1|}{2}$ $\exists\, \delta$ con

$|l_1 - f(x)| < \varepsilon$ y $|l_2 - g(x)| < \varepsilon$ $\forall\, 0 < |x-a| < \delta$

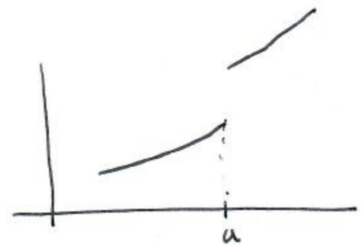
Así $g(x) < l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon < f(x)$ ¡!

b) Sea $l = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x)$

$|l - h(x)| \leq \max\{|l - f(x)|, |l - g(x)|\} \xrightarrow[x\to a]{} 0$

LÍMITE DE FUNCIONES

PROBLEMA 13:

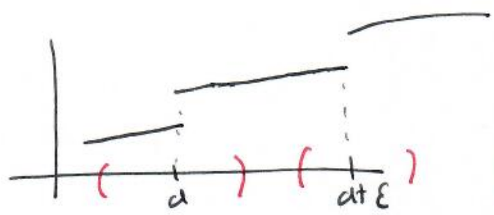


NO a) $f(x) \le f(a)\ \forall x \le a \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) \le f(a)$.

¡CIERTO! b) $f(a) \le f(x)\ \forall x > a$, LUEGO $\lim_{x\to a^+} f(x) \ge f(a)$

NO c) $\lim_{x\to a^-} f(x) \le \lim_{x\to a^+} f(x)$ YA QUE $f(x) \le f(y)\ \forall$ $x \le a \le y$)

NO d)



$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) \le \lim_{x\to (a+\varepsilon)^-} f(x)\ \forall \varepsilon > 0}$$

SEA $\frac{\varepsilon}{4}$, $a+\frac{\varepsilon}{4} < (a+\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{4} = a + \frac{3\varepsilon}{4}$

ASÍ $\forall x \in (a, a+\frac{\varepsilon}{4})$ y $\forall y \in (a+\frac{3\varepsilon}{4}, a+\varepsilon)$

$$f(x) \le f(y)$$

LUEGO $\lim_{x\to a^+} f(x) \le \lim_{x\to(a+\varepsilon)^-} f(x)$.

PROBLEMA 14: $\lim_{x\to -2^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\right)$

SI $-2 < x < -2+\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1$; ASÍ $\frac{x^n}{2^n} = (-1)^n\left(\frac{-x}{2}\right)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2^n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{2k+1}}{2^{2k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^k - \left(\frac{-x}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{-x}{2}\right)^2\right)^k = \left(1+\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^k =$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\cancel{1+\frac{x}{2}}}{\left(\cancel{1+\frac{x}{2}}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

↓ SERIE GEOMÉTRICA

LUEGO $\lim_{x\to -2^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right) = \lim_{x\to -2^+}\frac{2}{2-x} = \frac{2}{4} = 1/2$

LÍMITES DE FUNCIONES

PROBLEMA 15: VER PROBLEMA 11:

AHORA SEA $f(x) < g(x)$ CON $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$

EN EL CASO DE QUE SE DÉ LA IGUALDAD PODEMOS ESCRIBIR $\lim_{x\to a} g(x) \le \lim_{x\to a} f(x)$, PERO DE AQUÍ NO DEDUCIMOS QUE $g(x) \le f(x)$ CERCA DE a.

PROBLEMA 16: a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

SI $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 < \lim_{x\to a} g(x) = l_2$ ASÍ POR 11:

DE a Y POR TANTO

$$h(x) = g(x) \text{ CERCA DE } a$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = l_2 = \max\{l_1, l_2\}$$

SI $\lim_{x\to a} f(x) = l_1 > \lim_{x\to a} g(x) = l_2$ ASÍ POR 11:

DE a Y POR TANTO

$$h(x) = f(x) \text{ CERCA DE } a$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = l_1 = \max\{l_1, l_2\}$$

SI $l_1 = \lim_{x\to a} f(x) = l_2 = \lim_{x\to a} g(x)$, ENTONCES

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |l_1 - f(x)| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |l_1 - g(x)| < \varepsilon$

SEA $\delta > 0$, Y $0 < |x-a| < \delta$, ENTONCES

$$|l_1 - h(x)| \le \max\{|l_1 - f(x)|, |l_1 - g(x)|\} \le$$

$$\le \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon.$$

LUEGO $\lim_{x\to a} h(x) = l_1$.

b) ANÁLOGO

c) USAMOS QUE $\big||l_1| - |f(x)|\big| \le |l_1 - f(x)|$.

PROBLEMA 17: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SI } x > 0 \\ -1 & \text{SI } x \le 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$; $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

PROBLEMA 18: VER EL PROBLEMA 7: