LÍMITES DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1.- Halla el domonio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ **c)** $f(x)=\sqrt{|x+5|-|x-7|}$

d) $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen} x-\cos x}$ **e)** $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}$ **f)** $f(x)=\ln(\ln x)$

g $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ **h)** $f(x)=\ln(\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x})$ **i)** $f(x)=\arctan(\frac{1-2x}{4})$.

2.- Calcula $\lim_{x\to a} f(x)$ para las funciones $f : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en los casos siguientes:

a) $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a=0$ y $f(x)=1/x$ **b)** $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a=0$ y $f(x)=x/|x|$

c) $A=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $a=2$ y $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $A=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $a=-2$ y $f(x)=\dfrac{x^3-3}{x^2-4}$

e) $A=[0,2)$, $a=1$ y $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1) \\ x-1 & \text{si } x\in[1,2) \end{cases}$

f) $a=0$ y $f(x)=\dfrac{x^3+6x^2+x}{x^2+6x}$.

3.- Demuestra que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}\in\mathbb{R}$ si y solo si $m\geq n$. ¿Cuánto vale este límite?

4.- Estudia la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$, calcúlalo cuando exista, en los siguientes casos:

a) $a=1$ y $f(x)=\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$ **b)** $a=0$ y $f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{3x+1}}{2x^2+x}$

c) $a=0$ y $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ **d)** $a=0$ y $f(x)=\cos\frac{1}{x}$

e) $a=0$ y $f(x)=x\cos(\frac{1}{x})$ **f)** $a=0$ y $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

5.- Estudia en que puntos de $a\in\overline{A}$ existe el límite o los límites laterales de las funciones $f : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\in(-4,0) \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^3+1 & \text{si } x\in(0,2) \\ x+7 & \text{si } x\in[2,4) \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\in(-1,1) \\ 2x & \text{si } x\in[1,3) \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x^3+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$, con A igual a $(-4,4)$, (-1,3] y $\mathbb{R}$ respectivamente.

6.- a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ ¿pueden existir $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ y $\lim_{x\to a} fg(x)$?
b) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ ¿puede existir $\lim_{x\to a} g(x)$?
c) Si existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$ ¿puede existir $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$?
d) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} fg(x)$ ¿puede existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

7.- Prueba que: a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$;
b) y que $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

8.- Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ para las funciones $f : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $f(x) = 1/x$ **b)** $A = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ y $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

c) $A = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ y $f(x) = \dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$ **d)** $A = (4,\infty)$ y $f(x) = \dfrac{2-x-x^2}{x-3}$

e) $A = (-\infty, 2)$ y $f(x) = \dfrac{5x+1}{7x-15}$.

9.- Estudia el límite en $+\infty$ de $f : (0,\infty)\to\mathbb{R}$ en los casos siguientes:
a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

10.- Calcula los siguientes límites supuesto que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$, $(a,b>0)$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$.

11.- Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$, entonces prueba que:

a) si $c > b$ existe $\delta > 0$ de modo que $0 < |x-a| < \delta$ implica $f(x) < c$;

b) si $c < b$ existe $\delta > 0$ de modo que $0 < |x-a| < \delta$ implica $f(x) > c$.

12.- Supongamos que existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Prueba que:

a) si $f(x)\le g(x)$ para todo x, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$;

b) si $f(x)\le h(x)\le g(x)$ para todo x y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

13.- Si $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función monótona creciente y $a\in\mathbb{R}$, entonces puede ocurrir que:

a) $f(a) < \lim_{x\to a^-} f(x)$ **b)** $f(a) < \lim_{x\to a^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to a^+} f(x) < \lim_{x\to a^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to a^+} f(x) > \lim_{x\to (a+\epsilon)^-} f(x)$ para todo $\epsilon > 0$.

14.- Calcula el siguiente límite por la derecha:

$$\lim_{x\to -2^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right).$$

15.- Si $f, g : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, prueba que existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |x-a| < \delta$ con $x\in A$, entonces $f(x)\le g(x)$ ¿ Es cierta esta propiedad si sustituimos "$<$" por "$\le$"?

16.- Sean $f, g : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones tales que existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Prueba que:

a) si $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$, existe $\text{lím}_{x\to a} h(x)$;

b) si $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$, existe $\text{lím}_{x\to a} h(x)$;

c) si $h(x) = |f(x)|$, existe $\text{lím}_{x\to a} h(x)$.

17.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que existe $\text{lím}_{x\to a} |f(x)|$ ¿Es cierto que existe $\text{lím}_{x\to a} f(x)$?

18.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función prueba que

A) son equivalentes

- **1)** existe $\text{lím}_{x\to\infty} f(x) = l$;
- **2)** existe $\text{lím}_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = l$;

B) son equivalentes

- **1)** existe $\text{lím}_{x\to a^+} f(x) = l$;
- **2)** existe $\text{lím}_{x\to\infty} f(a + \frac{1}{x}) = l$.