CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1.- Estudia la continuidad de las funciones que se indican:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ en $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$;

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $f(-3) = 0$ y $f(3) = 1$.

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-1}$ si $x \in (2, \infty)$, $f(2) = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -1/(x-1) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ **e)** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

2.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$. Estudia la continuidad de $f, g, f \circ g$ y $g \circ f$.

3.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{si} \quad x \leq c \\ (ax+b)^2 & \text{si} \quad x > c \end{cases}$. Calcula a, en función de b y c para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

4.- a) Halla una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y continua en el resto de valores reales.

b) Halla una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y continua en el resto de valores relales.

5.- Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda + 1}$. Calcula el conjunto de valores λ que hacen que f sea continua en $[0, 1]$.

6.- a) Prueba que $f(x) = x^n$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluye que toda función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Prueba que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $[0, \infty)$.

c) Probaremos más adelante que las funciones $\operatorname{sen} x, \cos x$ y e^x son continuas en todo $\mathbb{R}$ y que $\ln x$ es continua en $(0, \infty)$.

7.- ¿Son continuas las funciones $f(x) = \text{máx}\{x^2, x^4\}$ y $\text{mín}\{x^2, x^4\}$?

8.- Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas ¿ lo son las funciones $h_1(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$, $h_1(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ y $h_3(x) = |f(x)|$?

9.- Da un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto de $\mathbb{R}$, pero que $|f|$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

10.- Si $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ ¿tiene f en 0 una discontinuidad evitable? ¿Y $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$ y $f(0) = 1$?

11.- Sea f la función $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ y $f(p/q) = 1/q$ si $p/q \in [0, 1]$ es una fracción irreducible. Sea $g(a) = \text{lím}_{x \to a} f(x)$ ¿Es la función f continua en $[0, 1]$? ¿Lo es g?

12.- Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $g(0) = 0$ y g es continua en cero, prueba que f es continua en cero ¿Es cierto el resultado si se suprime la condición $g(0) = 0$?

13.- Construye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique:
$0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ y $f(x) = 1$ si $|x| < 1$.

14.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Supongamos que f es continua en cero. Prueba que f es continua en todo $\mathbb{R}$. Determina explícitamente la función f.

15.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función continua de modo que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Determina f explícitamente.

16.- Sean S $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Prueba que:

a) $A = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > g(x) \,\}$ es un conjunto abierto.

b) $B = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = g(x) \,\}$ es un conjunto cerrado.

c) $C = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ \text{existe } y \in [0,1] \text{ con } f(y) = x \,\}$ es compacto.

17.- Halla f^{-1} para cada una de las siguientes funciones y dibuja su gráfica, si es posible, de estas inversas. Determina, en cada caso, si f y f^{-1} son continuas.

a) $f(x) = x^3 + 1$, con $x \in \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, para $-1 < x < 1$.

18.- Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua definida sobre I un intervalo o semirecta. Prueba que $f(I)$ es también un intervalo o semirecta.

19.- Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, inyectiva y con $f(a) \leq f(b)$ para un par de puntos distintos $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, prueba entonces que

$$f(\,[a,b]\,) = [\,f(a),\ f(b)\,].$$

¿ Qué sucede si $f(b) \leq f(a)$?

20.- Encuentra un ejemplo de una función $f : (2,7) \to \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $(2,7)$, con $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$, y tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(2,7)$. Justifica el ejemplo propuesto.

21.- Sea $\overrightarrow{d}$ una dirección en el plano y T un triángulo. Prueba que existe una recta con dirección $\overrightarrow{d}$ de modo que divide al triángulo en dos partes de áreas iguales.

22.- Sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado n-1 de modo que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números dados y $i = 1, 2, ...n$.

a) Encuentra un polinomio de grado 2, P, de modo que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(2) = 6$

b) Encuentra un polinomio de grado 3, P, tal que $P(-1) = 3, P(0) = 4, P(1/2) = 2$ y $P(2/3) = -3$.

23.- Un coche recorre 100 kilométros en 50 minutos sin detenerse. Demuestra que hubo un minuto en el que reocrrió 2 kilómetros.