DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\sqrt{x}$ b) $\operatorname{sen} x$ c) $\ln x$ d) $x^n,\ n \in \mathbb{N}$ e) $|x|$

f) $\cos x$ g) $\tan x$ h) $\ln|x|$ i) e^x j) $\frac{x^2-1}{x+1}$

k) $\arccos x$ l) $\arctan x$ m) $(\cos x)^{1/x}$ n) $\operatorname{sen}(\cos^2 x)$ ñ) $\sqrt{x^2-3x+2}$

o) $\ln(e^x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{\operatorname{sen} x}})$ p) $(x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^2+\ln(1/x))}$

2.- Calcula los puntos de corte de la tangente a la gráfica $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ por el punto $(a, 1/a^2)$ con la propia gráfica de f.

3.- Sean f y g dos funciones derivables en a de modo que $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Prueba que h definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \leq a \\ f(x) & \text{si} \quad x \geq a \end{cases},$$

es derivable en a. Justifica por que es necesario que $f'(a) = g'(a)$.

4.- Justifica las siguientes expresiones:

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ si $x \approx 0$

$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ si $x \approx 0$

$\ln x \approx x - 1$ si $x \approx 1$

5.- Prueba que si f es derivable en a, entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Comprueba que la existencia del límite anterior no es suficiente para que f sea derivable en a.

6.- Prueba que f' es periódica si f es periódica y derivable.

7.- Calcula $f'(0)$ para f definida por

$$f(x) \begin{cases} g(x)\operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

con $g(0) = g'(0) = 0$.

8.- Estudia la derivabilidad en el cero de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

9.- Halla f' en términos de g' si

a) $f(x) = g(\,x + g(a)\,)$ b) $f(x) = g(\,xg(a)\,)$ c) $f(x) = g(\,xg(x)\,)$

d) $f(x) = g(x)(x-a)$ e) $f(x) = g(a)(x-a)$ f) $f(x+3) = g(x^2)$.

10.- Prueba que una función f es derivable en cero y $f(0) = 0$ si y solo si existe una función g continua en el cero de modo que f(x)=xg(x).

11.- ¿Es cierto que si f es derivable en a, entonces existe un intervalo centrado en a en el cuál f es continua?

12.- Prueba que no existen dos funciones derivables f y g de modo que $f(0)=g(0)=0$ y que $x=f(x)g(x)$.

13.- Halla una fórmula para $(f^{-1})''(x)$.

14.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\pi x & \text{si} \quad x<-1 \\ 2+x^2 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 0 \\ 1+e^{-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} \frac{x\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x\in(0,\infty)\setminus\{1\} \\ 1 & \text{si} \quad x=1 \\ 0 & \text{si} \quad x\leq 0. \end{cases}$$

Además, dibuja las gráficas de cada función estudiando sus respectivos máximos y mínimos.

15.- Encuentra todas las funciones f tales que:

$$\text{a)} f'(x)=\operatorname{sen}x \qquad \text{b)} f'(x)=x^3 \qquad \text{c)} f''(x)=x+x^2.$$

16.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$. Se considera $g(x)=f^2(x)$. Calcula $g'(0)$ y $g''(0)$. Comprueba que $x=0$ es un mínimo local de la función g. Prueba además que f no es monótona en $(-\epsilon,0)$ ni en $(0,\epsilon)$ para cualquier $\epsilon>0$.

17.- El mínimo de la función $f(x)=4x^3-3x$ en $x\in[-2,2]$, se alcanza en el punto:

$$\text{a)} x=-1/2 \qquad \text{b)} x=-2 \qquad \text{c)} x=1/2 \qquad \text{d)} x=\sqrt{\tfrac{3}{12}}.$$

18.- Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones. Después dibuja sus gráficas indicando los máximos y mínimos locales:

$$\text{a)} f(x)=x^3-x^2-8x+1 \quad \text{en} \quad [-2,2]$$

$$\text{b)} f(x)=(x^5+x+1)^{-1} \quad \text{en} \quad [-1,1/2]$$

$$\text{c)} f(x)=\frac{x}{x^2-1} \quad \text{en} \quad [0,5].$$

19.- Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^4+x^4\operatorname{sen}^2(1/x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$. Prueba que f tiene un mínimo relativo estricto en $x=0$, aunque su derivada toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de 0 (tanto a su derecha compo a su izquierda).

20.- Sea una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Entonces $c\in(a,b)$ es un mínimo local de f si:

a $f'(c)=0$.

b $f'(c)=0$ y f"(c)=0.

c Existe $\delta>0$ de modo que para todo $r\in(a,b)\setminus\{c\}$ se tiene que

$$|f(r)-f(c)|>\delta.$$

d Existe $\delta>0$ de modo que para todo $r\in(a,b)\setminus\{c\}$ se tiene que

$$f(r)-\delta>f(c).$$

21.- Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de una curva $y = x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva en el punto de desconexión. ¿En que punto deberá parar el motor para alcanzar el punto $(4, 9)$?¿Y para llegar al $(4, -9)$?

22.- Una farola, que tiene su luz a 3m de su base, ilumina a un peatón de $1'75$m que se aleja a una velocidad constante de 1m/s ¿A que velocidad se mueve el extremo de su sombra?

23.- Determinar los máximos y mínimos locales de la función f si su derivada f' tiene por gráfica la de la figura:

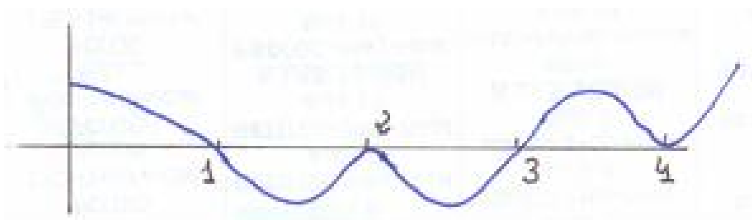
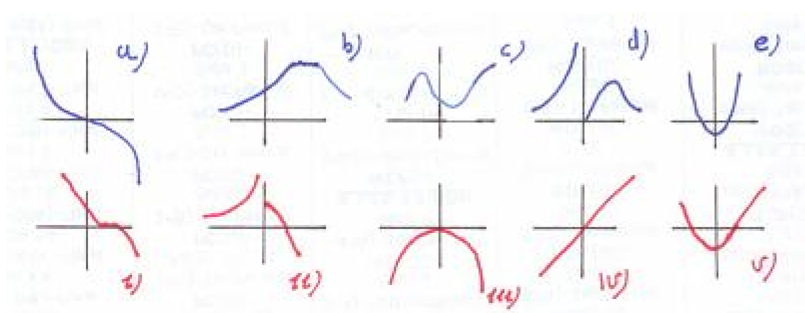


Figura 1:

24.- Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.



25.-Empareja cada una de las gráficas (a-e) con la de su derivada (i-v). Explica tu razonamiento.