ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES MONÓTONAS.

Las **funciones monótonas** tiene buenas propiedades. Son inyectivas y "casi" continuas. Después veremos el recíproco. Una función inyectiva y continua es estrictamente monótona.

Recordemos las siguientes definiciones:

Definición. 1. *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama:*

monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x \leq y$ se tiene que*

$$f(x) \leq f(x);$$

estrictamente monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) < f(x);$$

monótona decreciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) \geq f(x);$$

estrictamente monótona creciente: *si para $x, y \in A$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(x) > f(x).$$

Se dice de una función que es **estrictamente monótona** si lo es de forma creciente o decreciente. Se dice que es **monótona** si lo es de forma creciente o decreciente.

Ejercicio. 1. *Prueba que una función estrictamente monótona es inyectiva.*

Además se tiene lo siguiente.

Teorema. 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobre I intervalo o semirecta. Si f es una función monótona y acotada entonces para todo $x_0 \in I$ existen los límite laterales en x_0, es decir existen*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad y \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Demostración: Vemos la prueba para el caso de que la función f sea creciente. El caso f decreciente queda como ejercicio.

Sea x_0 un punto interior del intervalo I. En el caso de uno de sus extremos solo podemos aspirar a encontrar un solo límite lateral, queda también como ejercicio. Como x_0 es interior podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

Definimos

$$\alpha = \sup\{\, f(x) \;:\; x \in (x_0 - \delta, x_0)\,\}$$

y

$$\beta = \inf\{\, f(x) \;:\; x \in (x_0, x_0 + \delta)\,\}.$$

Ambos números existen dado que f está acotada. Además, por ser creciente, $\beta \leq \alpha$. Solo queda ver que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$$

y que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$$

Vamos con el primer límite. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que $\beta + \epsilon$ no es un ínfimo, por tanto existe un $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ de modo que

$$\beta \leq f(x_1) \leq \beta + \epsilon.$$

Por ser f creciente, para todo $x_0 < x \leq x_1$ (o equivalentemente para todo $0 < x - x_0 \leq |x_0 - x_1| = r$) se tiene que

$$\beta \leq f(x) \leq f(x_1) \leq \beta + \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad |\beta - f(x)| \leq \epsilon.$$

Para ver que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$ se procede de forma análoga $\square$

En las hipótesis del Teorema anterior se pide que f sea acotada para evitar los casos como él de la figura siguiente. En ella solo podemos aspirar a encontrar límites laterales infinitos.

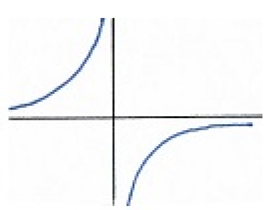

FIGURA 1

Proposición. 1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona acotada sobre un intervalo o semirecta I. Sean $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, entonces*

si f es creciente: $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$;

si f es decreciente: $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \geq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$.

Demostración: Veamos el caso de f creciente. El otro es análogo.

Del Teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \inf\{\, f(x) \ : \ x \in (x_1, x_1 + \delta)\,\} = \beta$$

y que

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \sup\{\, f(x) \ : \ x \in (x_2 - \delta, x_2)\,\} = \alpha.$$

Es claro que podemos tomar el mismo $\delta > 0$ en ambos casos de modo que

$$(x_1, x_1 + \delta) \cap (x_2 - \delta, x_2) = \emptyset.$$

FIGURA 2

Puesto que la función f es creciente, si $y_1 \in (x_1, x_1+\delta)$ y $y_2 \in (x_2-\delta, x_2)$, por tanto $y_1 < y_2$, se sigue que

$$f(y_1) \leq f(y_2).$$

Ya es claro que

$$\beta \leq \alpha \qquad \square$$

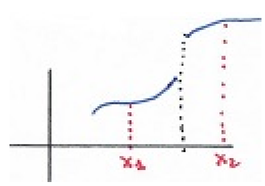

FIGURA 3

Ambos resultados prueban que las **discontinuidades** de las funciones monótonas acotadas son desigualdades de salto.

De lo anterior se deduce que una función monótona no puede terner "muchas" discontinuidades.

Teorema. 2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona acotada sobre un intervalo o semirecta I. El conjunto de las discontinuidades de f en I es a lo más numerable.*

Demostración: Consideramos el conjunto de discontinuidades de f

$$E = \{\, x \in I \ : \ f \text{ discontinua en } \ x \,\}.$$

Veamos que E tiene cardinal a lo más él de $\mathbb{N}$ (ver Apéndice de Cardinalidad).

Supondremos que f es creciente (se procede de forma análoga en el caso de que f sea decreciente).

Sea $x_0 \in E$. Como f es discontinua en x_0 podemos encontrar un $r_{x_0} \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) < r_{x_0} < \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Definimos la aplicación

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{Q} & & \\ & & x & \to & \varphi(x) & = & r_x \end{array}$$

Esta aplicación es **inyectiva** ya que si $x_1, x_2 \in E$, distintos con $x_1 < x_2$, por la Proposición anterior tenemos que

$$r_{x_1} < \lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x) < r_{x_2},$$

luego $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ son distintos.

Por ser φ inyectiva se sigue que

$$Card E \leq Card \mathbb{Q} \leq Card \mathbb{N} \qquad \square$$

Para terminar veamos que las funciones inyectivas y continuas tienen que ser necesariamente monótonas.

Teorema. 3. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua sobre un intervalo o semirecta I. f es estrictamente monótona en I.*

Demostración: Dado que f es inyectiva, si suponemos que no es estritamente monónota tendríamos que existirían $x_1, x_2, x_3 \in I$, con $x_1 < x_2 < x_3$, de modo que o bien

$$f(x_2) < f(x_1) \qquad \text{y} \qquad f(x_2) < f(x_3)$$

o bien

$$f(x_2) > f(x_1) \qquad \text{y} \qquad f(x_2) > f(x_3).$$

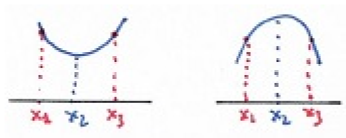

Figura 4

En cualquiera de las dos situaciones anteriores, como f es continua, el Teorema de Bolzano nos asegura que f no sería inyectiva lo que es una contradicción $\square$

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es